普通高等教育"十一五"国家级规划教材

工　程　力　学

材料力学

（第4版）

北京科技大学
东　北　大　学　编

高等教育出版社

内容简介

本书是普通高等教育"十一五"国家级规划教材。自1979年出版以来，前三版教材，选材恰当，侧重基础部分，内容精练，深广度适当，难易适度，适应多层次教学要求。第4版教材在原有基础上，着重对有关理论和概念的研讨，对典型例题的剖析，增强分析问题的能力，以适应21世纪培养人才的要求。

本教材分静力学、运动学和动力学以及材料力学三个分册。静力学分册共六章，内容包括：静力学的基本概念及受力图、平面汇交力系，力矩及平面力偶系，平面一般力系，摩擦，空间力系及重心等。运动学和动力学分册共十一章，内容包括：点的运动，刚体的基本运动，点的合成运动，刚体的平面运动，质点的运动微分方程，刚体绕定轴的转动微分方程，动静法，动能定理，动量定理和动量矩定理，振动，虚位移法等。材料力学分册共十章，内容包括：轴向拉伸和压缩，剪切，扭转，弯曲内力，弯曲应力，弯曲变形及静不定梁，应力状态和强度理论，组合变形构件的强度，压杆的稳定，材料的力学性能等。

本书可作为高等学校冶金、材料、热加工、能源动力、地矿、仪器仪表、轻工纺织、食品化工、环境及各相关专业的教材，也可供独立学院、高职高专、成人高校师生及有关工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

工程力学. 材料力学／北京科技大学，东北大学编.
—4版. —北京：高等教育出版社，2008.1（2009重印）
ISBN 978-7-04-022675-1

Ⅰ.工… Ⅱ.①北…②东… Ⅲ.①工程力学-高等学校-教材②材料力学-高等学校-教材 Ⅳ.TB12

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第182532号

策划编辑 黄 毅 责任编辑 葛 心 封面设计 张志奇 责任绘图 朱 静
版式设计 张 岚 责任校对 朱惠芳 责任印制 宋克学

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
总 机 010-58581000

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 高等教育出版社印刷厂

开 本 787×960 1/16
印 张 22.75
字 数 420 000

购书热线 010-58581118
免费咨询 800-810-0598
网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
畅想教育 http://www.widedu.com

版 次 1979年5月第1版
2008年1月第4版
印 次 2009年3月第5次印刷
定 价 26.20元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。
版权所有 侵权必究
物料号 22675-00

目 录

引 言

机器或结构物都是由若干构件组成的。在静力学中，根据力的平衡关系，已经解决了构件外力的计算问题。然而，在外力作用下，如何保证构件正常地工作，还有待进一步解决。

在工程实际中，常常遇到这样的情况：当构件受力过大时，会发生破坏而造成事故，或者构件在受力后产生过大的变形而影响机器或结构物的正常工作。例如，机器中常用的齿轮轴，有时会因载荷过大而断裂，造成机器停止运转，或者在受力后变形过大而影响齿轮间的正常啮合。这些情况在工程实际中都是不允许的。因此，为了保证机器或结构物正常地工作，要求每个构件都有足够的抵抗破坏的能力，也就是说，要求它们有足够的强度；同时也要求构件有足够的抵抗变形的能力，即要求它们有足够的刚度。除此以外，有时还会遇到这样的问题：例如一根受压的细长直杆，当沿杆轴方向的压力增大到一定数值时，杆就会由原来的直线状态突然变弯，这种突然改变其平衡状态的现象，称为丧失稳定，这也是工程实际中所不允许的。因此对这一类构件，还要求它们工作时能保持原有的平衡状态，即要求其有足够的稳定性。强度、刚度和稳定性，这是设计构件时所必须考虑的几个问题。

在设计一个构件时，除了要求构件能正常地工作外，同时还应考虑合理地使用和节约材料，即还要考虑经济方面的要求。一般来说，前者要求用较多或较好的材料；后者则要求少用材料或以贱代贵。二者常常是矛盾的。材料力学的主要任务就是为受力构件提供强度、刚度和稳定性计算的理论基础，从而为构件选用适当的材料，确定合理的形状和尺寸，以达到既经济又安全的要求。

工程中有时对某些构件也会提出相反的要求。例如，为保护主要部件而设置的安全装置，在超载时应首先破坏，从而避免主要部件受到损坏。又如为减轻冲击作用而安装的缓冲弹簧，则要求有较大的变形。这类问题，也需用材料力学所提供的理论基础来计算。

制造各种构件所采用的材料，虽然品种繁多，性质各异，但它们都有一个共同的特性，就是在外力作用下都会发生形状和尺寸的改变，即产生变形。在研究构件的强度、刚度等问题时，物体的变形是一个不可忽略的因素。因此，在材料力学中，将构成构件的材料皆视为可变形固体。

材料的物质结构和性质是比较复杂的,为了研究上的方便,必须忽略某些次要性质,只保留它们的主要属性,将其简化为一个理想化的模型。因此,对可变形固体又作了以下的基本假设:

1. 均匀连续假设

认为在整个体积内都毫无空隙地充满着物质,而且物体内任何部分的力学性能都是完全一样的。实际上,由物质结构上看,各种材料都是由无数颗粒(如金属中的晶粒)组成的,物质内部存在着不同程度的空隙,而且各颗粒的力学性能也不尽一致;但由于材料力学是由宏观的角度去研究构件的强度等问题,这些空隙远远小于构件的尺寸,而且各颗粒是错综复杂地排列于整个体积之内,因此,由统计平均的观点看,可以把材料看成是均匀连续的。采用这个假设,便可以从构件中取出无限小的部分来进行研究,然后将研究结果推广于整个构件;也可将由小尺寸试样在实验中测得的材料力学性能,一定程度地移用于尺寸不同的构件或无限小的部分中去。

2. 各向同性假设

认为材料沿各个不同方向的力学性能均相同。这个假设对许多材料来说是符合的,均匀的非晶体材料,一般都是各向同性的。对金属等这类由晶体组成的材料,虽然每个晶粒的力学性能是有方向性的,但由于它的大小远小于构件的尺寸,而且其排列也是不规则的,因此各个方向的力学性能就趋于一致了。而木材、拉拔过的钢丝和轧制过的钢材等,则为非各向同性的材料。但在材料力学中,研究各向同性材料所得的结论,也可近似地用于上述一些具有方向性的材料。

还须指出,工程实际中构件受力后的变形一般都很小,它相对于构件的原有尺寸来说要小得多,因此在分析构件上力的平衡关系时,变形的影响可忽略不计,仍按构件的原有尺寸来进行计算。

在机器或结构物中,构件的形式是多种多样的,但最常见最基本的形式是杆件。所谓杆件,就是纵向(长度方向)尺寸远大于横向(垂直于长度方向)尺寸的构件。例如,悬臂吊中的拉杆和横梁,机器中的齿轮轴,巷道支护中的立柱和顶梁、连接件中的销钉等,这些都是较典型的杆件。杆件是材料力学研究的主要对象。杆件的问题解决了,不仅解决了工程实际中大部分构件的问题,也为解决其他形式构件的问题提供了基础。例如,起重用的钢丝绳、桥式吊车的大梁、齿轮上的轮齿及轧钢机机架等构件和设备,都可以将其简化为一根杆件或杆件的组合物来处理。

构件在工作时的受力情况是各不相同的,受力后所产生的变形形式也随之而异。对于杆件来说,其受力后所产生的变形,有以下几种基本形式:

① 轴向拉伸和轴向压缩　例如托架的拉杆和压杆受力后的变形(图0-1)。

② 剪切　例如连接件中的螺栓和销钉受力后的变形(图 0－2)。

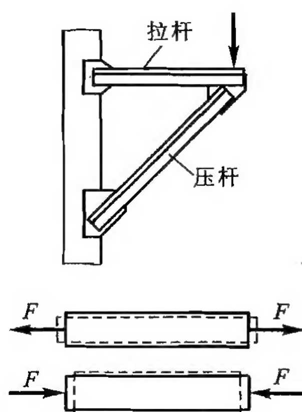


图 0－1

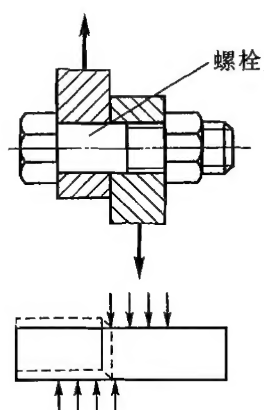


图 0－2

③ 扭转　例如机器中的传动轴受力后的变形(图 0－3)。

④ 弯曲　例如单梁吊车的横梁受力后的变形(图 0－4)。对于变形比较复杂的杆件,也不外乎这几种基本变形的组合。

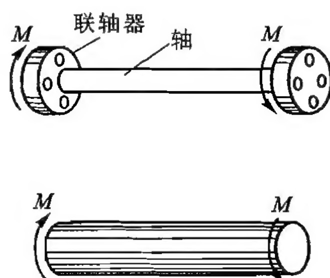


图 0－3

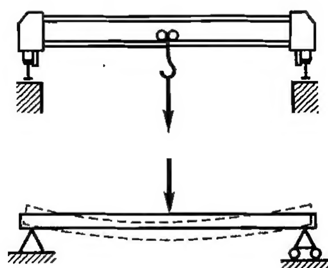


图 0－4

综上所述,材料力学所研究的问题是构件的强度、刚度和稳定性;构成构件的材料是可变形固体;对材料所作的基本假设是均匀连续性和各向同性假设;材料力学所研究的构件主要是杆件;杆件的几种基本变形形式是:拉伸(或压缩)、剪切、扭转和弯曲。

思考题

0－1　材料力学研究的主要问题是什么?

0－2　材料力学的强度、刚度、稳定性是如何定义的？强度与刚度有何区别？强度、刚度、稳定性在工程实际中有何意义？

0－3　设计构件时首先应考虑什么问题？设计过程中存在哪些矛盾？

0－4　在材料力学中有哪些基本假设？这些基本假设是怎样简化了力学模型？

0－5　杆件有几种基本变形形式？

第一章　轴向拉伸和压缩

§1-1 工程实际中的轴向拉伸和压缩问题

在工程实际中，有很多轴向拉伸和压缩的构件。下面通过几个实例，说明这些构件的受力和变形特点。

厂矿中常用的悬臂吊，由拉杆和横梁等组成，各构件间用铰链连接，如图1-1a所示。其中，拉杆工作时受到 B、C 两端的拉力作用，这个拉力是通过销钉作用在销钉孔上的，如图1-1b所示。拉力在销钉孔处的分布情况，仅影响销钉孔附近的局部区域，对拉杆的主体来说，没有什么影响，可不加考虑；而其合力 F 则是影响拉杆强度的主要因素。因此可以将拉杆简化为如图1-1c所示的受力情况，杆受到一对拉力的作用，拉力 F 的作用线与杆的轴线重合。

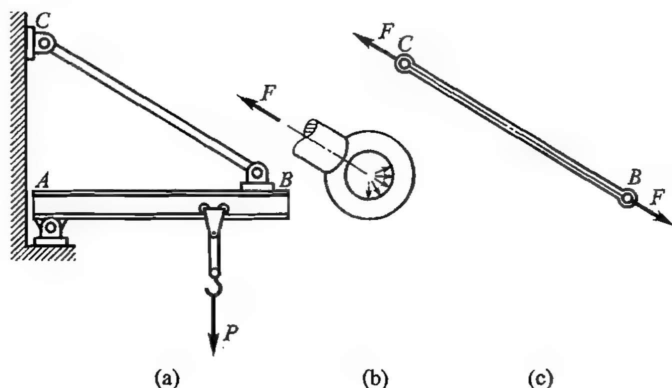


图1-1

同样，吊运重物的钢丝绳，用于某些连接的螺钉(图1-2)。桁架中的拉杆(图1-3)等。它们都可以简化为这样的受力情况。这一类构件称为轴向拉伸构件。

又如汽车式起重机的支腿。支架给支腿的压力分布于支腿的螺纹上(图1-4a)，但由于其合力的作用线与支腿的轴线重合，因而在考虑支腿整体的强

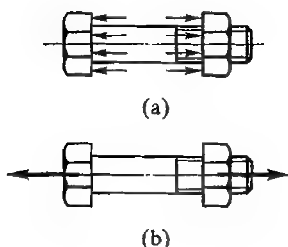


图 1－2

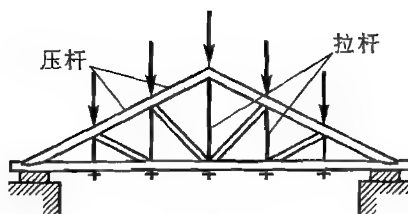


图 1－3

度时，可以将它简化为一个沿轴线方向的压力 F。在支腿的下端，地面给支腿底座反作用力的合力，亦可视为与支腿的轴线相重合。因此可以将支腿简化为图 1－4b 所示的受力情况，其上受到一对沿轴线方向的压力作用。

此外如桁架中的压杆（图 1－3）等，它们的受力情况也都是这样。这一类构件称为轴向压缩构件。

综上各例，可以看出，工程实际中许多轴向拉伸或压缩的构件多为等截面直杆，它们受力的共同特点是：作用在杆上外力合力的作用线与杆的轴线相重合。如果撇开杆件的具体形式和外力作用的具体方式，把杆件及其受力情况加以简化，则可以概括出其典型的受力简图如图 1－5 所示。在这样的外力作用下，其主要的变形特点是：杆产生沿轴线方向的伸长或缩短，这种变形形式，称为轴向拉伸或压缩。当外力为拉力时，为轴向拉伸（图 1－5a）；当外力为压力时，为轴向压缩（图 1－5b）。

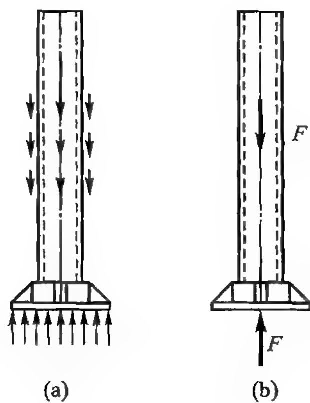


图 1－4

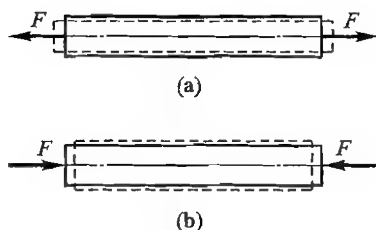


图 1－5

为了保证杆件安全地工作，对许多轴向拉伸和压缩的杆件，需要进行强度计

算。有些杆件还须考虑刚度方面的要求。由于对这类杆件在工程实际中提出的问题大量是强度问题，故本章主要讨论拉伸和压缩杆件的强度计算。

§1-2 轴向拉伸和压缩时的内力

构件工作时，总要受到其他物体所施加的力的作用，例如作用在构件上的载荷、支反力等，这些力相对于整个构件来说，都属于外力。在静力学中，已经讨论了外力的计算。但仅仅知道构件上的外力，仍不能解决构件的强度和刚度等问题，还需进一步了解构件的内力。为此，本节首先介绍内力的概念，然后讨论内力的求法。

1. 内力的概念

物体内部某一部分与另一部分间相互作用的力称为内力。构件在受到外力作用的同时，其内部将产生相应的内力。

我们知道，物体是由无数颗粒组成的，在其未受外力作用时，各颗粒间就存在着相互作用的内力，以维持它们之间的联系及物体的原有形状。当物体受到外力作用而变形时，各颗粒间的相对位置将发生改变；与此同时，颗粒间的内力也发生变化。这个因外力作用而引起的内力改变量，就是材料力学中所要研究的内力。今后所讨论的，就是这种内力。

在这里必须注意，材料力学中所指的内力与静力学曾经介绍的内力有所不同。前者是物体内部各部分之间的相互作用力；后者则是在讨论物体系统的平衡时，各个物体之间的相互作用力，它相对于物体系这个整体来说，是内力，但对于一个物体来说，就属于外力了。

2. 截面法　轴力

为了揭示在外力作用下构件所产生的内力，确定内力的大小和方向，通常采用下述的截面法。

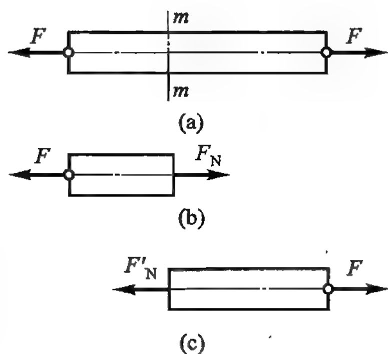


图 1-6

设有一根如图 1-6a 所示的拉杆，为求某一横截面 $m-m$ 上的内力，可假想地用一个横截面在 $m-m$ 处把杆截开，分为左右两段，任取其中一段，例如取左段为研究对象，弃去右段。这时，由于左段仍然保持平衡，所以在横截面上必然有一个力 F_N 作用(图 1-6b)，它就是右段对左段的作用力，也就是一个内力。这样，就将截面上的内力揭示了出来。由于物体的连续性，内力实际上是分布于整个横截面上的，

这里的内力 F_N 是指这些分布内力的合力。同样,如果选取右段为研究对象,则左段对右段的作用可以用力 F'_N 来代替(图 1-6c)。F_N 与 F'_N 是左右两部分在横截面上的作用力与反作用力,两者大小相等,方向相反。

截面上内力的大小和方向,可以利用平衡条件来确定,例如在左段杆上,根据二力平衡条件,内力 F_N 必然与杆的轴线相重合,其方向与外力 F 相反,并由平衡方程

$$\sum F_x = 0, F_N - F = 0$$

可得

$$F_N = F$$

如果选取右段为研究对象,采用同一方法也可以得到同样的结果。不难看出,当仅在杆两端作用两轴向外力时,改换横截面 $m-m$ 的位置并不影响上述所得的结果,可见此杆各横截面上的内力都相同。

综上所述,这种假想地用一个截面将构件截开,从而揭示内力并确定内力的方法,称为截面法。可以将这一方法归纳为以下两个步骤:

① 假想地用一个截面将构件截开为两部分,取其中一部分为研究对象,弃去另一部分,将弃去部分对研究对象的作用,以截面上的内力来代替。

② 根据研究对象的平衡条件确定内力的方向和大小。

第一步的作用是揭示内力,第二步的作用是确定内力(方向和大小)。截面法是材料力学中的一个基本方法,今后将经常用到。

由以上的分析结果知道,对于轴向拉伸和压缩的杆件,其横截面上内力的方向皆垂直于截面,且合力必通过截面的形心,这样的内力称为轴力。对于轴向拉伸的杆件,轴力指向离开截面,称为轴向拉力,常以正号表示;对于轴向压缩的杆件,轴力指向截面,称为轴向压力,常以负号表示。必须指出,在静力学中,列平衡方程时是根据力在坐标中的方向来规定力的正负号;而在材料力学中,则是根据构件的变形来规定内力的正负号,这是材料力学与静力学在方法上的一个区别,在今后作各种计算时,应特别加以注意。

前曾指出,截面上的内力是分布在整个截面上的,利用截面法只能求出这些分布内力的合力。今后,在研究各类问题时所指的内力,就是指截面上分布内力的合力。下面再通过例题说明截面法的应用。

例 1-1 设一杆沿轴线同时受力 F_1、F_2、F_3 的作用,其作用点分别为 A、C、B,如图 1-7a 所示。求杆的轴力。

解:由于杆上有三个外力,因此在 AC 段和 CB 段的横截面上将有不同的轴力。

(1) 在 AC 段内的任意处以横截面 1-1 将杆截为两段,取左段为研究对象,将右段对左段的作用以内力 F_{N1} 代替(图 1-7b)。由平衡条件知 F_{N1} 必与杆的轴线重合,方向与 F_1 相反,为拉力。并由平衡方程

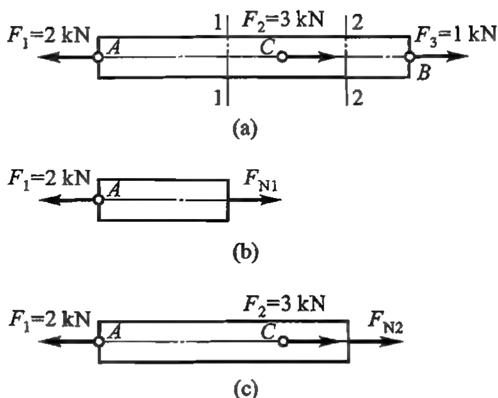


图 1－7

$$\sum F_x = 0, F_{N1} - F_1 = 0$$

得

$$F_{N1} = F_1 = 2\ \text{kN}$$

这就是 *AC* 段内任一横截面上的内力。

(2) 再在 *CB* 段内的任意处以横截面 2－2 将杆截开，仍取左段为研究对象。此时因截面 2－2 上内力 F_{N2} 的方向一时不易确定，可将 F_{N2} 先设为拉力，如图 1－7c 所示，再由平衡方程

$$\sum F_x = 0, F_{N2} - F_1 + F_2 = 0$$

得

$$F_{N2} = F_1 - F_2 = 2\ \text{kN} - 3\ \text{kN} = -1\ \text{kN}$$

结果中的负号说明，该截面上内力的方向与原设的方向相反，即 F_{N2} 为压力，其值为 1 kN，此即 *CB* 段内任一横截面上的内力。

以上的计算，都是选取左段为研究对象，如果选取右段为研究对象，仍可得到同样的结果。读者可以自试。

提醒注意：未知内力的方向可任意假设，若求得为正值，说明假设方向正确；求得负值，则与假设方向相反，但轴力的正负另有定义：拉力为正，压力为负。上述两种正负号的不同含义不应混淆。为方便起见，通常在运用截面法计算内力时都假设各横截面的轴力均为正（拉力），则由计算结果轴力的正、负号可直接判定是拉（或压）力。

例 1－2　两钢丝绳吊运一个重 10 kN 的重物，如图 1－8a 所示，试求钢丝绳的拉力。

解：同时用 1－1 和 2－2 两个截面将两钢丝绳截开，取上半部为研究对象（图 1－8b）。设两钢丝绳拉力分别为 F_{N1} 和 F_{N2}，且由对称关系知 $F_{N1} = F_{N2}$，又因吊钩所受向上的拉力也是 10 kN，则由平衡方程

$$\sum F_y = 0,\ 10\ \text{kN} - F_{N1}\cos 30° - F_{N2}\cos 30° = 0$$

即

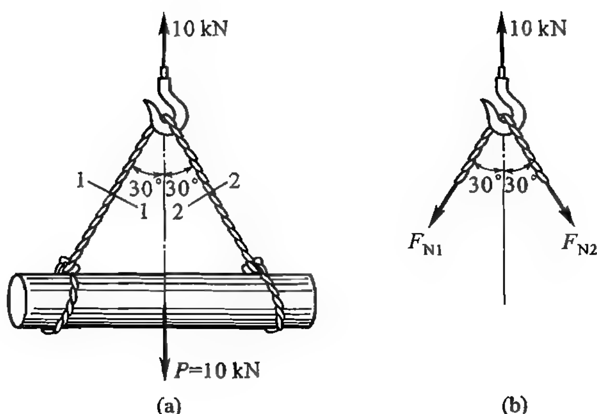


图 1 - 8

$$10\ \text{kN} - 2F_{N1}\cos\ 30° = 0$$

得

$$F_{N1} = 5.78\ \text{kN} = F_{N2}$$

关于这类问题，实际上在静力学中已经有所接触，只是当时并未明确指出钢丝绳的拉力为内力罢了。

§1-3 轴向拉伸和压缩时的应力

通过截面法，可以求出构件的内力。但是仅仅求出内力还不能解决构件的强度问题。因为同样的内力，作用在不同大小的横截面上，会产生不同的结果。例如两根材料相同，横截面面积不等的直杆，若两者所受的轴向拉力相同（此时横截面上的内力也相同），则随着拉力的增加，细杆将先被拉断。这说明构件的危险程度取决于截面上分布内力的聚集程度，而不是取决于分布内力的总和。在上述事例中，同样的轴力，聚集在较小的横截面上时，就比较危险；而将其分散在较大的横截面上时，就比较安全。因此在讨论构件的强度问题时，还必须了解内力在截面上的聚集程度，以分布在单位面积上的内力来衡量它，称之为应力。

在我国法定计量单位中，应力的单位是 Pa（帕斯卡）：

$$1\ \text{Pa} = 1\ \text{N/m}^2$$

下面就来研究轴向拉伸和压缩时，等截面直杆横截面上的应力。

要确定应力，必须了解内力在横截面上的分布情况。内力是不能直接观察到的，但是构件在受力后引起内力的同时，总要发生变形，内力与变形之间是存在着一定的物理关系的。因此，可以通过观察变形的方法来了解内力的分布。

取一个橡皮（或其他易于变形的材料）等直杆，在其侧面划两条垂直于杆轴的横线 ab、cd，并在两横线间划几条平行于杆轴的纵线（图 1－9a）。然后在杆两端加一对轴向拉力，使其产生拉伸变形（图 1－9b）。这时可以看到：横线 ab、cd 分别平移到了 $a'b'$ 和 $c'd'$，但仍然垂直于杆的轴线；各纵线的伸长皆相等。可以认为，这一现象是杆的变形在其表面的反映。从而假设杆内部的变形情况也是如此，即杆变形后各横截面仍保持为平面。这个假设称为平截面假设。如设想杆由无数纵向纤维所组成，则在任意两横截面间各条纤维的伸长相同。由此可知每根纤维所受的内力相等，也就是说横截面上的内力是均匀分布的；因而横截面上的应力也必然是均匀分布，如图 1－9c 所示。在离外力作用点略远处（例如，距离约等于横截面尺寸），这一结论也是正确的。这就是圣维南（Saint－Venant）原理，它已被试验所证实。

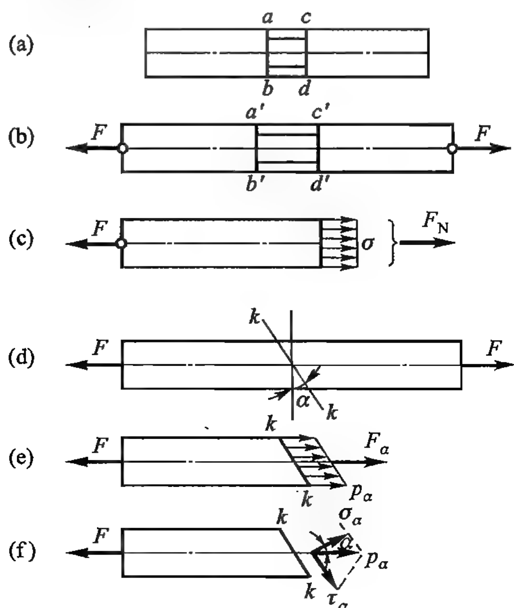


图 1－9

根据应力的定义和横截面上应力均匀分布的规律，可以得到

$$\sigma = \frac{F_N}{A} \tag{1-1a}$$

式中：σ——横截面上的应力；

F_N——横截面上的轴力；

A——横截面面积。

当杆两端只受一对拉（压）力 F 时，因 $F_N = F$，故上式又可表示为

$$\sigma = \frac{F}{A} \tag{1-1b}$$

以上两式即为轴向拉伸和压缩时横截面上应力的计算公式。由于分布在横截面上的内力皆垂直于截面，故此时的应力也必然垂直于截面，这种垂直于截面的应力，称为正应力。当轴力为拉力时，为拉应力；轴力为压力时，为压应力。为表述上的方便，有时以正号表示拉应力；以负号表示压应力。

由正应力计算公式(1－1b)可以看出，当杆件的横截面面积一定时，外力越大，横截面上的正应力就越大；而作用在杆件上的外力一定时，横截面面积越小，则应力越大。这说明了粗细二杆受相同的外力时为什么细杆先断的缘故。

上面分析了横截面上的正应力，下面分析与横截面成 α 角的任一斜截面 $k-k$上的应力（图 1－9d），用截面法，沿斜截面 $k-k$ 将杆截开，取左段为研究对象（图 1－9e），可得斜截面 $k-k$ 上的内力 F_α 为

$$F_\alpha = F$$

仿照对横截面上正应力均匀分布的分析，可知斜截面上的应力也是均匀分布的。以 p_α 表示斜截面的应力，可得

$$p_\alpha = \frac{F_\alpha}{A_\alpha} = \frac{F}{A_\alpha}$$

$$p_\alpha = \frac{F}{A}\cos\alpha = \sigma\cos\alpha$$

由图 1－9f 可得

$$\sigma_\alpha = p_\alpha\cos\alpha = \sigma\cos^2\alpha \tag{1-1c}$$

$$\tau_\alpha = p_\alpha\sin\alpha = \frac{\sigma}{2}\sin 2\alpha \tag{1-1d}$$

从上式可知，斜截面上不仅有正应力（沿截面法线方向的应力），且存在切应力（沿截面切线方向的应力），其大小随截面的方位而变化。当 $\alpha = 0°$时，正应力最大，$\sigma_{max} = \sigma_0$。即拉压杆的最大正应力发生在横截面上，其值为 σ_0。当 $\alpha = 45°$ 时，切应力最大，$\tau_{max} = \frac{\sigma_0}{2}$。即拉压杆的最大切应力发生在与杆成45°的斜截面上，其值为 $\sigma_0/2$。其中 $\sigma_0 = \frac{F}{A}$。

例 1－3 图 1－10a 为轧钢机的压下螺旋，其尺寸如图所示。设压下螺旋所受的最大压力 $F = 800$ kN，试求其最大正应力。

解：

(1) 计算轴力 因压下螺旋的最大应力将产生于截面最小的部位，所以用截面法在最小直径处将其截开，取下半部为研究对象（图 1－10b），由平衡方程得

$$F_N = F = 800\ \text{kN}$$

(2) 计算最小横截面面积　由图中所示尺寸知

$$A_{min}=\frac{\pi d_{min}^2}{4}=\frac{3.14\times(70\ \text{mm})^2}{4}$$
$$=3\ 850\ \text{mm}^2=3\ 850\times10^{-6}\ \text{m}^2$$

(3)计算最大正应力　由式(1-1)得

$$\sigma_{max}=\frac{F_N}{A_{min}}=\frac{800\ \text{kN}\times1\ 000}{3\ 850\times10^{-6}\text{m}^2}$$
$$=208\times10^6\ \text{Pa}$$
$$=208\ \text{MPa}$$

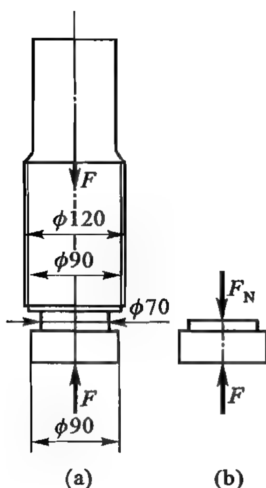


图 1-10

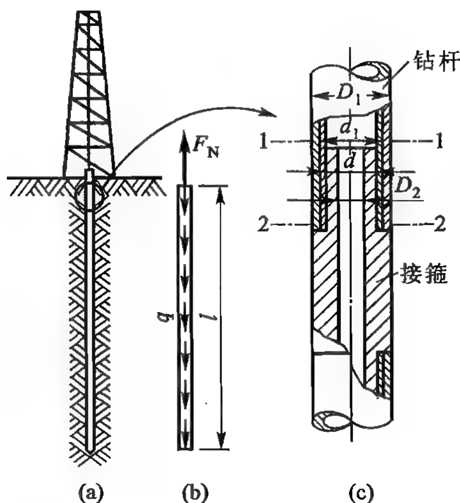


图 1-11

例 1-4　地质岩芯钻杆如图 1-11 所示。钻杆的外径 $D_1=42$ mm,螺纹的外径 $d_1=36$ mm,接箍的孔径 $D_2=12$ mm,螺纹的内径 $d=32$ mm;钻杆总长度 $l=1\ 000$ m,单位长度重量为 $q=40$ N/m。试求提取钻杆时,钻杆和接箍的最大应力。岩层给钻杆的摩擦力暂不考虑。

解:

(1) 计算轴力　提取钻杆时,钻杆受自重的作用,各横截面上的内力不同,而钻杆顶端处须承受钻杆的全部重量,故此处横截面上的轴力最大。由截面法,截取顶端截面以下的全部钻杆为研究对象(图 1-11b),则由平衡方程

$$\sum F_y=0,\ F_N-ql=0$$

得轴力

$$F_N=ql=1\ 000\ \text{m}\times40\ \text{N/m}$$
$$=40\ 000\ \text{N}$$

(2) 计算横截面面积　由所给尺寸,钻杆在螺纹处的横截面面积为

$$A_1=\frac{\pi}{4}(D_1^2-d_1^2)=\frac{3.14}{4}\times[(42\ \text{mm})^2-(36\ \text{mm})^2]=368\ \text{mm}^2$$

接箍螺纹处的横截面面积为

$$A_2=\frac{\pi}{4}(d^2-D_2^2)=\frac{3.14}{4}\times[(32\ \text{mm})^2-(12\ \text{mm})^2]=690\ \text{mm}^2$$

(3) 计算最大应力　在顶端的接头处，钻杆在截面 1－1 上的应力最大，其值为

$$\sigma'=\frac{F_N}{A_1}=\frac{40\ 000\ \text{N}}{3.68\times10^{-4}\ \text{m}^2}=109\times10^6\ \text{Pa}=109\ \text{MPa}$$

接箍在截面 2－2 上的应力最大，其值为

$$\sigma''=\frac{F_N}{A_2}=\frac{40\ 000\ \text{N}}{6.9\times10^{-4}\ \text{m}^2}=58\times10^6\ \text{Pa}=58\ \text{MPa}$$

§1－4 轴向拉伸和压缩时的变形

上节中，在分析轴向拉伸和压缩杆件的应力分布时，曾初步利用了变形与内力之间的关系。同样的分析方法，在今后还将用到。在研究刚度问题时，也必然要涉及构件的变形。因此，本节再介绍一些有关变形的基本知识。

杆件在轴向拉伸或压缩时，所产生的主要变形是沿轴线方向的伸长或缩短；但是实验表明，与此同时，杆的横向尺寸还会有缩小或增大，前者称为**纵向变形**，后者称为**横向变形**。

1. 纵向变形

设一等直杆受轴向拉力 F 作用，如图 1－12 所示，变形前杆的长度为 l，受力后伸长至 l'，则其纵向伸长量为

$$\Delta l=l'-l$$

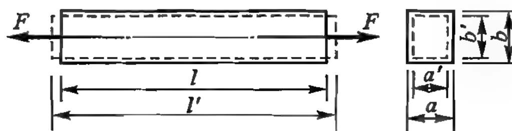


图 1－12

这个伸长量称为绝对伸长，它与拉力 F 之间的关系，与材料的固有性能有关，须通过试验的方法来研究。许多材料的试验表明，当拉力不超过某一限度时，杆件的变形是弹性的，即外力除去后，变形消失，杆件恢复原状；而且其伸长量 Δl 与拉力 F 和杆件的原长 l 成正比，与杆件的横截面面积 A 成反比。可以用数学式表示为

$$\Delta l\propto\frac{Fl}{A}$$

如果引进一个比例系数，则

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} \tag{1-2a}$$

由于此时杆横截面上的轴力 F_N 与拉力 F 相等，故又可表示为

$$\Delta l = \frac{F_N l}{EA} \tag{1-2b}$$

以上两式也适用于轴向压缩时的情况。Δl 为伸长时，以正号表示；Δl 为缩短时，以负号表示。

式(1-2)就是轴向拉伸和压缩时纵向变形的计算公式，称为胡克定律。式中的 E 值与材料的性能有关，称为材料的弹性模量。其值愈大，则杆件的变形愈小，故它是衡量材料抵抗弹性变形能力的一个指标。分析上式的量纲，可知弹性模量的单位与应力的单位相同，在我国法定计量单位中为 Pa。

由式(1-2)可以看出，对长度相等、受力相同的杆，EA 愈大，杆的变形就愈小，所以 EA 代表了杆件抵抗拉伸(或压缩)变形的能力，称为杆件的抗拉(压)刚度。

由式(1-2)还可以看到，在 E、A、F_N 相同的情况下，杆件的长度 l 愈大，则其绝对伸长量 Δl 也愈大，故绝对伸长量 Δl 还不能说明杆件的变形程度。因此，需要运用相对伸长的概念，以单位长度的伸长来衡量杆件的变形程度：

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \tag{1-3}$$

式中的 ε 称为纵向线应变，是一个量纲一的量，伸长时以正号表示，缩短时以负号表示。

如果将式(1-2b)改写为

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \cdot \frac{F_N}{A}$$

并以式(1-3)和式(1-1)代入，可得胡克定律的又一形式：

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \tag{1-4}$$

此式表明，当正应力不超过某一限度时，正应力与线应变成正比。

2. 横向变形

设拉杆原有宽度为 b，厚度为 a，受轴向拉力后分别缩小至 b'和 a (图 1-12)。此时杆在宽度和厚度方向的横向变形分别为：

$$\Delta b = b - b', \Delta a = a - a'$$

且二横向相对变形相等，同为

$$\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta a}{a}$$

式中的 ε' 称为横向线应变。由大量的实验表明，对于同一种材料，在弹性范围内，其横向线应变 ε' 与纵向线应变 ε 的绝对值之比为一常数，即

$$\left|\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right| = \mu$$

比值 μ 称为横向变形系数或称泊松比，它是一个随材料而异的常数，是一个量纲一的量。利用这一比例关系，可以通过杆的纵向线应变来求横向线应变，即

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon \tag{1-5}$$

式中的负号表示：当纵向线应变为伸长时，横向线应变为缩短；纵向线应变为缩短时，横向线应变为伸长，它们之间的正负号总是相反的。

将式(1－4)代入式(1－5)，又可得

$$\varepsilon' = -\mu\frac{\sigma}{E} \tag{1-6}$$

利用此式，可由纵向正应力求横向线应变。

弹性模量 E 和泊松比 μ 是材料的两个弹性常数，可由试验测定，表 1－1 给出一些常用材料的 E 和 μ 的大约数值。胡克定律[式(1－4)]和这两个弹性常数在今后研究构件的变形或应力时，将经常用到。

表 1－1　弹性模量和泊松比的约值

材料名称	弹性模量 E/GPa	泊松比 μ
碳钢	196～216	0.24～0.28
Q345	200～220	0.25～0.33
合金钢	190～220	0.24～0.33
灰铸铁、白口铸铁	115～160	0.23～0.27
可锻铸铁	155	
铜及其合金	74～130	0.31～0.42
铝及硬铝合金	71	0.33
铅	17	0.42
花岗石	49	
石灰石	42	
混凝土	14.6～36	0.16～0.18
木材(顺纹)	10～12	
橡胶	0.008	0.47

§1－5 拉伸和压缩时材料的力学性能

构件的强度和变形不仅与应力有关，还与材料本身的性能有关。在工程实际中，对各种构件的材料选择，产品的质量分析和检验等，都需要具有材料力学性能的有关知识。因此，还必须研究材料的力学性能。材料的力学性能，是通过各种试验方法来测定的。其中，常温、静载条件下的拉伸试验是最主要最基本的一种。所谓常温，就是室温；所谓静载，就是加载的速度要平稳缓慢。材料许多重要的力学性能指标都是由这种试验测定。

1. 低碳钢拉伸时的力学性能

低碳钢是在工程实际中使用极为广泛的材料，同时，它在拉伸试验中所表现出的力学性能比较全面。因此，首先以低碳钢为典型材料，研究其拉伸时的力学性能。

拉伸试验的方法和要求，在国家标准《金属材料室温拉伸试验方法》（GB 228—2002）中有详细的规定。为了便于不同材料的试验结果进行比较，试验前应按国家标准规定的形状和尺寸，将材料做成标准的试样。对于金属材料通常采用圆柱形试样，其形状如图 1－13 所示。在试样等直部分的中段划取一段 l_0 作为标距，或称工作长度。标距长度有两种，对于长试样取 $l_0=10d_0$；对于短试样取 $l_0=5d_0$。式中 d_0 为试样的直径。

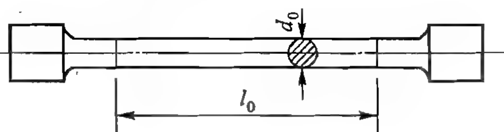


图 1－13

试验所用的主要设备是：对试件施加载荷的万能材料试验机和测量试样变形的引伸仪。试验时将试样的两端装在试验机的夹头中，对试样缓缓地施加拉力；同时在试样上安装引伸仪测量试样在标距长度内的伸长。在试验过程中，观察试样的变形情况和出现的各种现象，记录出有关的数据，便可看出材料受力后的某些特性和测出反映材料某种能力的性能指标。

通过低碳钢的拉伸试验可以看到，随着拉力 F 的逐渐增加，标距长度的伸长 Δl 作有规律的变化。如果取一个直角坐标系，令横坐标表示变形 Δl，纵坐标表示拉力 F，则在试验机的自动绘图装置上可以画出 Δl 与 F 之间的关系曲线如图 1－14 所示。这条曲线称为低碳钢的拉伸图。

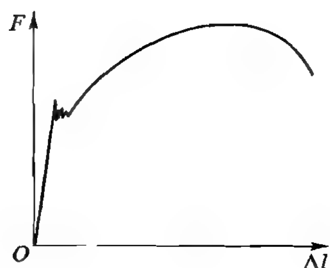


图 1-14

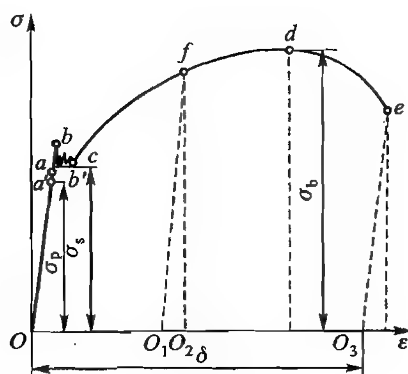


图 1-15

拉伸图只反映了试样受力过程中的现象,还不能直接反映材料的力学性能,因为这一曲线是受试样的几何尺寸影响的。例如,如果试样做得粗一些,产生相同的伸长所需的拉力就大一些;如果试样的标距长一些,则在同样的拉力作用下,伸长也会大一些。为了消除试样尺寸的影响,使试验结果能反映材料的性能,将拉力 F 除以试样的原横截面面积 A_0,以应力 $\sigma = F/A_0$ 来衡量材料的受力情况;将标距的绝对伸长量 Δl 除以标距原有长度 l_0,以应变 $\varepsilon = \Delta l/l_0$来衡量材料的变形情况。这样就将图 1-14 的拉伸图,改变为图 1-15 所示的以应力和应变为坐标的曲线,称为应力-应变曲线,其形状与拉伸图相似。

根据低碳钢的应力-应变曲线的特点,可将其分为 Oa、bc、cd 和 de 四个阶段:

(1) 弹性阶段

在 Oa 阶段内,材料的变形是弹性的。当应力 σ 小于 a 点的应力时,如果卸去外力,使应力逐渐减少到零,此时相应的应变 ε 也随之完全消失。材料受外力后变形,卸去外力后变形完全消失的性质称为弹性。因此 Oa 阶段称为弹性阶段,相应于 a 点的应力称为弹性极限。在此阶段内,除靠近 a 点的极小一段$a'a$ 外,应力与应变的关系是沿直线 Oa'变化的。也就是说,应变 ε 与应力 σ 成正比,其比例常数就是弹性模量 E,即

$$\sigma = E\varepsilon, \quad 或 \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

这就是前一节中所说的胡克定律。利用这个关系,可由拉伸试验测出材料的弹性模量。对应于 a'点的应力称为比例极限,以 σ_p 表示。Q235 钢的比例极限约为 $\sigma_p = 200$ MPa。由于比例极限与弹性极限非常靠近,试验中很难加以区别,所

以实际应用中常将两者视为相等。

(2) 屈服阶段

当应力到达 b 点的相应值时,应力不再增加,仅有些微小的波动;而应变却在应力几乎不变的情况下急剧地增长,材料暂时失去了抵抗变形的能力。这个现象一直延续到 c 点。如果试样经过抛光,这时可以看到试样表面有许多与试样轴线约成 45°角的条纹,称为滑移线。这种应力几乎不变,应变却不断增加,从而产生明显的塑性变形的现象,称为屈服现象,bc 阶段称为屈服阶段。相应于 b 点的应力值称上屈服点;在应力波动中,首次下降所到达的最低值(对应于曲线中的 b'点)称下屈服点。由于上屈服点之值受试验时一些因素的影响较大,不如下屈服点稳定,故规定下屈服点作为材料的屈服点(或称屈服极限),以 σ_s 表示。Q235 钢的屈服点约为 $\sigma_s = 240$ MPa。

材料的屈服,主要是晶体滑移的结果。金属是由无数的晶粒组成的,每一个晶粒又由许多原子按一定的几何规律排列而成,如图 1-16 所示。塑性变形的产生是由于晶粒中原子与原子间沿着某一方向的结合面产生滑移的结果。图 1-17就是单晶体滑移现象的示意图,它正如一叠钱币发生错动一样。大批晶粒滑移积累的结果便造成了材料的屈服。在轴向拉伸的情况下,与轴线成 45°的方向最易于产生滑移(对此,第七章将再作说明),所以滑移线的方向与试件的轴线成 45°角。

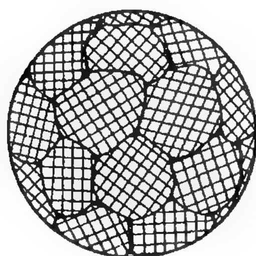


图 1-16

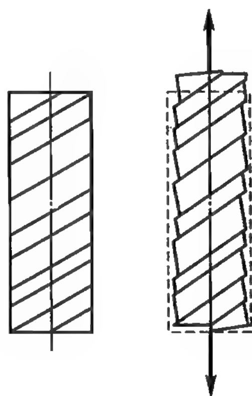


图 1-17

(3) 强化阶段

经过屈服阶段以后,从 c 点开始曲线又逐渐上升。材料又恢复了抵抗变形的能力,要使它继续变形,必须增加应力,这种现象称为材料的强化。从 c 点至 d 点称为强化阶段。

在强化阶段内的任一点 f 处若慢慢卸去外力,此时应力应变关系将沿着与

Oa 近乎平行的直线 O_1f 回到 O_1 点(图 1－15)。这说明材料的变形已不能全部消失,其中,能消失的变形称为弹性变形;残留下来的变形称为残余变形或塑性变形。在应变坐标中的 O_1O_2 即表示材料的弹性应变,OO_1 则表示塑性应变。可见,试样在强化阶段产生了很大的塑性变形。材料能产生塑性变形的这种性质,称为塑性。如果现在再重新加载,应力应变关系将大体上沿着 O_1fde 的曲线变化,直至断裂。这相当于,原材料的应力－应变曲线已转换为图 1－18所示的曲线。图中同时以虚线表示卸载前的应力应变关系。比较 $Ofde$ 与 O_1fde 这两条曲线,可以看出,若材料曾一度受力到达强化阶段,然后卸载,则再重新加载时,其比例极限 σ_p 和屈服点 σ_s 将提高,而断裂后的塑性变形将减小,这种现象称为加工硬化或冷作硬化。

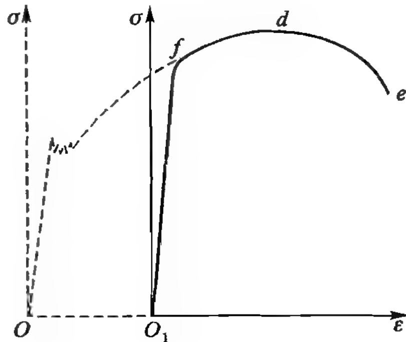


图 1－18

加工硬化提高了材料在弹性阶段内的承载能力,但是降低了材料的塑性。我们有时可以利用它有利的一面,例如用冷拉的方法可以提高钢筋的强度;有时则要消除其不利的一面,例如冷轧钢板或冷拔钢丝时,由于加工硬化,降低了材料的塑性,使继续轧制和拉拔困难,为了恢复其塑性,则要进行退火处理。

(4) 局部变形阶段

在应力到达 d 点的相应值之前,沿试样的长度,变形是均匀的。当应力到达 d 点的相应值后,试样的变形开始集中于某一小段的范围内,横截面面积出现局部迅速收缩,这种现象称为颈缩现象。由于局部的截面收缩,使试样继续变形所需的拉力逐渐减小,所以,由原截面面积 A_0(不是颈缩处的截面面积)除以拉力 F 而计算出的名义应力 σ 也渐渐下降,因而曲线过 d 点后向下弯曲,直到 e 点,试样断裂。由 d 点到 e 点这个阶段,称为局部变形阶段。相应于 d 点的应力称为抗拉强度(或强度极限),以 σ_b 表示。Q235 钢的抗拉强度为 $\sigma_b = 380 \sim 470$ MPa。

由上述的试验现象可以看到,当应力到达屈服点 σ_s 时,材料会产生显著的塑性变形;当应力到达抗拉强度 σ_b 时,材料会由于局部变形而导致断裂。这都是工程实际中应当避免的。因此,屈服点 σ_s 和抗拉强度 σ_b 是反映材料强度的两个性能指标,也是拉伸试验中需要测定的重要数据。

在图 1－15 中,横坐标值 OO_3 代表了材料拉断后的塑性变形程度,称为材料的伸长率或延伸率,以 δ 表示,其值为试样拉断后,标距部分所增加的长度与

原标距长度的百分比，用下式计算：

$$\delta_n = \frac{l_1 - l_0}{l_0} \times 100\% \qquad (1-7)$$

式中：l_1——试样拉断后标距的长度；

l_0——原标距长度；

n——长试样和短试样的标志，对长试样（即 $l_0 = 10d_0$），$n = 10$；对短试样（即 $l_0 = 5d_0$），$n = 5$。

工程实际中也常用断面收缩率来衡量材料的塑性，以 ψ 表示。其值为试样断裂后，断裂处横截面面积的缩减量与原横截面面积的百分比，其计算式为：

$$\psi = \frac{A_0 - A_1}{A_0} \times 100\% \qquad (1-8)$$

式中：A_0——试样原横截面面积；

A_1——试样断裂处的横截面面积。

伸长率 δ 和断面收缩率 ψ 是代表材料塑性的两个性能指标。Q235 钢的塑性指标是：$\delta_5 = 25\% \sim 27\%$；$\psi = 60\%$ 左右。δ 和 ψ 的数值愈高，说明材料的塑性性能愈好。一般 $\delta > 5\%$ 的材料称为塑性材料，如低合金钢、碳素钢和青铜等；$\delta < 5\%$ 的材料称为脆性材料，如铸铁、混凝土、石料等。

通过低碳钢的拉伸试验，我们看到了材料在拉伸时的一些力学性能。其中，弹性模量是反映材料抵抗弹性变形能力的指标；屈服点 σ_s 和抗拉强度 σ_b 是反映材料强度的两个指标；伸长率 δ 和断面收缩率 ψ 则是反映材料塑性的指标。

2. 其他材料拉伸时的力学性能

在工程实际中所使用的金属材料品种很多，它们的力学性能也各不相同，在这里再作一些简单的介绍。

结合我国的自然资源，近几年来我国大量发展了低合金高强度钢（合金元素总含量≤5%的合金钢，简称低合金钢）。这些钢材具有优良的力学性能和很好的使用效果，Q345（16Mn）钢就是其中的一种典型钢种，它拉伸时的应力－应变曲线如图 1－19 所示，图中同时给出了 Q235 钢的应力－应变曲线。比较这两条曲线，可以看到，Q345 钢拉伸时的应力－应变曲线与 Q235 钢的相似，但其屈服点 σ_s 和抗拉强度 σ_b 比 Q235 钢显著提高。它的各种性能指标为 $\sigma_s = 290 \sim 350$ MPa，$\sigma_b = 480 \sim 520$ MPa，$\delta_5 = 21\% \sim 29\%$，$\psi = 45\% \sim 60\%$。由此可见，Q345 钢的力学性能更优于低碳钢，现在已被广泛使用。

在同样试验条件下得到的锰钢、硬铝、退火球墨铸铁和青铜等材料的应力－应变曲线如图 1－20 所示。由这些曲线可以看出，这些材料与低碳钢相同之处是，它们断裂后都具有较大的塑性变形，同属于塑性材料；不同之处是，都没有明

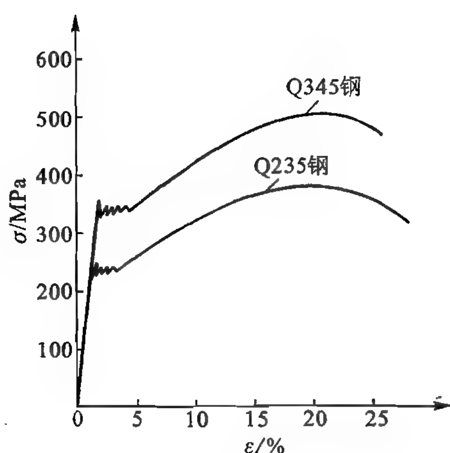


图 1－19

显的屈服阶段，因此得不到明确的屈服点。对于这类材料，国家标准规定，取对应于试样产生 0.2% 的塑性应变时的应力值为材料的屈服强度，用 $\sigma_{0.2}$ 表示，如图 1－21 所示。工程实际中即以此作为材料的强度指标。

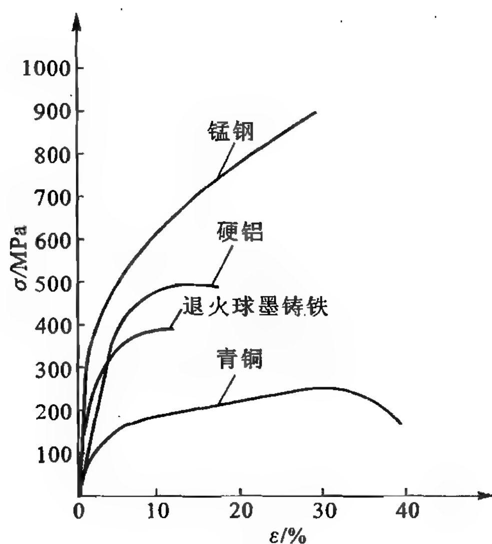


图 1－20

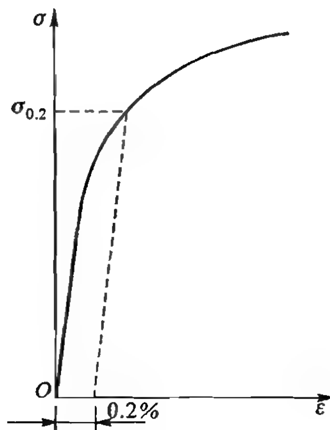


图 1－21

图 1－22 为灰铸铁和玻璃钢拉伸时的应力－应变曲线。它们的共同特点是，直到拉断，试件的变形很小，断口处的横截面面积几乎没有变化，这种断裂状态称为脆性断裂；这些材料都属于脆性材料。它们的另一特点是，没有屈服阶

段，不存在屈服点。所以脆性材料以抗拉强度 σ_b 作为其强度指标。灰铸铁的拉伸曲线没有明显的直线部分，对于应力应变不成直线关系的脆性材料，由于其断裂后的变形很小，可近似地认为，在工程实际中所使用的应力范围内，应力、应变仍成直线关系，即用一条割线来代替曲线，如图 1－22 中的虚线。这样胡克定律又近似地可以应用。

3. 材料压缩时的力学性能

由于材料在受压时的力学性能与受拉时并不完全相同，因此除拉伸试验外，还有必要做压缩试验。金属材料的压缩试样为圆柱形，高度为直径的 1.5～3.0 倍；混凝土、石料等的试样为立方块。

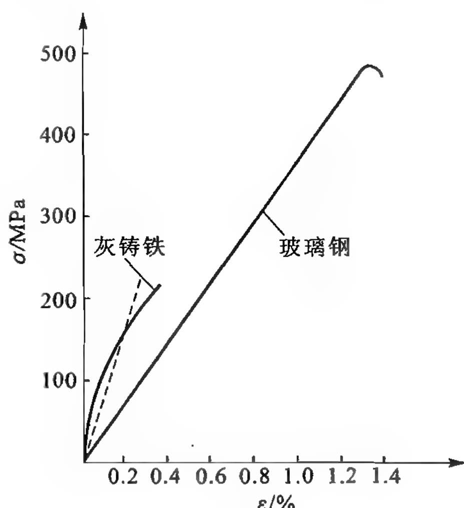


图 1－22

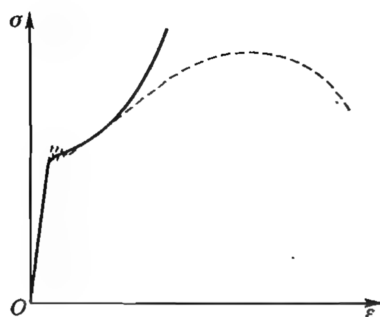


图 1－23

低碳钢在压缩时的应力－应变曲线如图 1－23 所示，图中同时以虚线表示拉伸时的应力－应变曲线。可以看出，这两条曲线的主要部分基本重合，因此低碳钢压缩时的弹性模量 E、屈服点 σ_s 等都与拉伸试验的结果基本相同。当应力到达屈服点以后，试样出现显著的塑性变形，如继续增加压力，其长度明显缩短，截面变粗。由于试样两端面与压头间摩擦力的影响，试样两端的横向变形受到阻碍，所以试样被压成鼓形。随着外力的增加，愈压愈扁，但并不破坏，因此测不出其抗压强度。

由上可见，低碳钢压缩时的一些性能指标，可通过拉伸试验测出，而不必再作压缩试验。类似情况在一般塑性材料中也存在。但有些塑性材料压缩时的屈服点与拉伸时不同，如铬钼硅合金钢，因此对这些材料还须测定其压缩时的屈服点。

与塑性材料相反，脆性材料压缩时的力学性能与拉伸时有较大区别。例如，铸铁压缩时的应力－应变曲线(图 1－24)与拉伸时的应力－应变曲线(图1－24中的虚线)相比，其抗压强度 σ_c 远比抗拉强度 σ_b 为高，约为抗拉强度的 2～5 倍。铸铁压缩时也有较大的塑性变形，其破坏形式为沿与轴线约成 45°左右的斜面断裂。

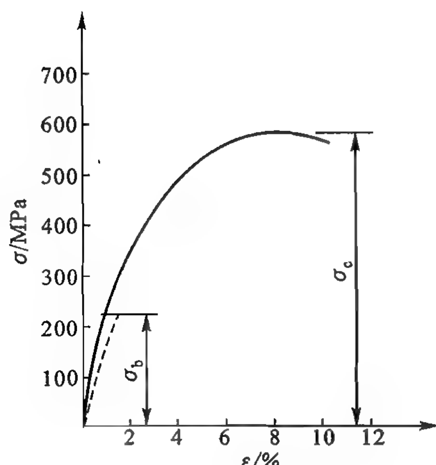


图 1－24

混凝土和石料的压缩试验表明，其抗压强度也远大于抗拉强度。破坏时，由于试样两端面的横向变形受摩擦力的阻碍，因此试样由周围中部逐步剥落而破坏。混凝土的破坏如果在压头与试样间垫上石蜡等润滑材料，减少摩擦力的影响，则试样将沿纵向面而断裂。

各种材料拉伸和压缩时的力学性能，都采用上述的方法来测定。工程实际中常用材料的力学性能见表 1－2 和表 1－3。

通过上述试验，比较塑性材料与脆性材料的力学性能，可以看出两者有以下的区别：

① 塑性材料在断裂前有很大的塑性变形，脆性材料断裂前的变形则很小，这是它们的基本区别。因此，在工程实际中塑性材料适用于需要进行锻压、冷加工等加工过程的构件或承受冲击载荷的构件。

② 脆性材料的抗压能力远比抗拉能力强，且其价格便宜，因此适用于受压的构件，如建筑物的基础、机器的基座、外壳等；而不适用于受拉的构件。塑性材料的抗压与抗拉能力相近，适用于受拉的构件。

应该指出，习惯上所指的塑性材料或脆性材料是根据在常温、静载下由拉伸试验所得的伸长率 δ 的大小来区分的。实际上，材料的塑性和脆性并不是固定

表 1-2　常用金属材料拉伸和压缩时的力学性能（常温、静载）

材料名称	牌　　号	屈服点 σ_s/MPa	抗拉强度 σ_b/MPa	抗压强度 σ_c/MPa	伸长率 δ_s/%	用　　途
普通碳素钢（GB 700—1988）	Q235 钢	240	380～470		25～27	金属结构构件，普通零件
	Q275 钢	280	500～620		19～21	同上
优质碳素钢（GB/T 699—1999）	45	355	600		16	强度要求较高的零件，齿轮、轴等
	50	375	630		13	用于制作要求高强度零件
普通低合金钢（GB/T 1591—1994）	Q345	275～345	470～630		21～22	建筑结构、起重设备、容器、造船、矿山机械
合金结构钢（GB 3077—1988）	40Cr（调质）	550～800	750～1 000		9～15	齿轮、轴、曲轴、连杆等
	40MnB（调质）	500～800	750～1 000		10～12	可代替 40Cr 钢
球墨铸铁（GB 1348—1988）		300～420	400～600		1.5～10	轧辊、曲轴、凸轮轴、齿轮、活塞、阀门、底座
灰铸铁（GB 9439—1988）	HT150		100～280	650		轴承盖、基座、泵体、壳体
	HT200		160～320	750		同上
铝　合　金（GB 3190—1982）	LY11	110～240	210～420		18	航空结构件、铆钉等
	LD9	280	420		13	内燃机活塞等
铜　合　金（GB 5233—1985）	QA19-2（软）	300	450		20～40	船舶零件
	QA19-4（软）	200	500～600		40	齿轮、轴套等

表 1-3　常用非金属材料拉伸和压缩时的力学性能(常温、静载)

材料名称	抗拉强度 σ_b/MPa	抗压强度 σ_c/MPa	伸长率 δ_s/%	用　途
酚醛层压板(HG2-212-65)	85~100	垂直于板层:230~250 平行于板层:130~150		结构材料和各种机械零件
有机玻璃	>55	130		
聚三氟氯乙烯	≥30		≥20	耐腐蚀高压密封件、泵和管道零件
聚四氟乙烯	14~24		150~350	耐腐蚀、耐高温的密封元件、管道、衬里、容器、轴承等
尼　龙	55~70	46~90	10~200	
红松(顺纹)	98	33		
杉木(顺纹)	77~97	36~41		
混凝土	0.3~1	2.5~80		

不变的。它们会因制造方法、热处理工艺、变形速度、应力情况和温度等条件而变化。例如铸铁在拉伸时的塑性变形极小,而在压缩时出现的塑性变形则较大;冷加工或淬火可使塑性材料呈现脆性;有的脆性材料在高温下也会呈现塑性;在铸铁中加入球化剂则可使其变为塑性较好的球墨铸铁;等等。因此,如果说材料处于塑性或脆性状态,就更确切些。

§1-6 轴向拉伸和压缩时的强度计算

前面分别讨论了轴向拉伸和压缩时,杆件的应力计算和材料的力学性能。在此基础上,下面进一步讨论强度计算的问题。

1. 安全因数和许用应力

由拉伸和压缩试验知道,当材料的应力到达抗拉强度 σ_b(或抗压强度 σ_c)时,杆就会发生断裂;当塑性材料的应力到达屈服点 σ_s 时,杆就会产生显著的塑性变形。这两种情况在工程实际中都是不允许的,因为构件的断裂显然是丧失

了工作能力，而过大的变形也会影响构件的正常工作。因此断裂和屈服都属于破坏现象。若要构件能正常地工作，对于低碳钢等塑性材料，通常要求其应力不得超过屈服点 σ_s（或屈服强度 $\sigma_{0.2}$）；对于铸铁等脆性材料，由于没有屈服点，破坏时无明显变形，则要求其应力不超过抗拉强度（或抗压强度 σ_c）。这些不允许超过的应力值统称为极限应力，以 σ_u 表示。

但是，仅仅将构件的工作应力限制在极限应力的范围内还是不够的，这是因为出于以下的考虑：

① 主观设定的条件与客观实际之间还存在着差距。例如：材料性能不均匀，由少数试样所测定的力学性能，并不能完全真实地反映构件所用材料的情况；载荷的估计和计算不够精确；对构件的结构、尺寸和受力等情况作了一定程度的简化，计算公式近似性；一些加工工艺，如热处理、焊接等对构件强度的影响考虑不全；以及一些影响构件强度的因素尚不为我们所认识；等等。所有这些，都可能使构件的实际工作条件比设计时所设定的条件更偏于不安全。

② 构件需有必要的强度储备。这是为了使构件在工作期间，即使遇到意外的超载情况或其他不利的工作条件时（如温度变化、腐蚀等），也不至于发生破坏。在意外因素相同的条件下，对因破坏而会造成严重后果的构件，或工作条件比较恶劣的构件，强度储备需要大一些；反之，则可以小一些。

因此，为了保证构件能安全地工作，还须将其工作应力限制在比极限应力 σ_u 更低的范围内，也就是将材料的破坏应力 σ_u 打一个折扣，即除以一个大于 1 的数 n 以后，作为构件工作应力所不允许超过的数值。这个应力值称为材料的**许用应力**，以 $[\sigma]$ 表示，n 称为**安全因数**，它们之间的关系是：

$$[\sigma]=\frac{\sigma_u}{n} \tag{1-9}$$

上式中，如极限应力 σ_u 的依据不同，相应的安全因数也随之而异。对于塑性材料，应取屈服极限 σ_s（或 $\sigma_{0.2}$）为极限应力，其许用应力为

$$[\sigma]=\frac{\sigma_s}{n_s}$$

对于脆性材料，其极限应力为抗拉强度 σ_b（或抗压强度 σ_c），因而

$$[\sigma]=\frac{\sigma_b}{n_b}$$

上二式中的 n_s 和 n_b 分别为对应于屈服极限和抗拉强度的安全因数。由构件的安全程度来看，由于断裂比屈服更为危险，所以 n_b 比 n_s 要大些。

由于一般所指的塑性材料和脆性材料，其划分界线的依据不够确切，因此以材料的屈服极限与抗拉强度之比 σ_s/σ_b 为依据来选取极限应力和安全因数。比值 σ_s/σ_b 称为**屈强比**。对屈强比较低的材料，以屈服极限 σ_s 作为极限应力，其

安全因数 n_s 也较低一些。例如,在静载荷作用下的一般零部件,轧件和锻件的安全因数取 $n_s=1.2\sim2.2$,铸件取 $n_s=1.6\sim2.5$。对屈强比较高的材料,例如高强度钢,由于其屈服点 σ_s 已接近于抗拉强度 σ_b,则取 σ_b 作为极限应力,其安全因数 n_b 也较高一些。例如一般情况下钢材取 $n_b=2.0\sim2.5$;铸件取 $n_b=4$。对脆性材料,取 $n_b=2.0\sim3.5$。

安全因数的确定是一件复杂的工作,它受具体构件的工作条件影响很大,还有经济上的考虑。因此,企图对一种材料规定统一的安全因数,从而得到统一的许用应力,并将它用于设计各种工作条件不同的构件,这是不科学的。目前,在机械设计和建筑结构设计中,均倾向于根据构件的材料和具体工作条件,并结合过去制造同类型构件的实践经验和现实的技术水平,规定不同的安全因数。对于各种不同构件的安全因数和许用应力,有关设计部门在规范中有具体的规定。下面举几个例子,说明在不同情况下安全因数和许用应力的选取。

土建工程中的金属结构,基本上承受静载荷,常用 Q235 钢,取 $n=1.5$。相应的许用应力 $[\sigma]=\dfrac{\sigma_s}{n}=\dfrac{240}{1.5}\ \text{MPa}=160\ \text{MPa}$。

起重机金属结构,因承受动载荷,安全因数比土建工程中的金属结构要大些,对 Q235 钢,取 $n=1.7$,其许用应力则为 $[\sigma]=140\ \text{MPa}$。

拧紧连接螺栓的许用应力还与其直径有关。对小直径的螺栓,由于拧紧时比大直径螺栓更易于超载,其许用应力要取得小些。例如,在静载荷下,对碳素钢螺栓,当名义直径 $d_0=6\sim16$ mm 时,取 $[\sigma]=(0.20\sim0.25)\sigma_s$;当 $d_0=16\sim30$ mm 时,取 $[\sigma]=(0.25\sim0.4)\sigma_s$;当 $d_0=30\sim60$ mm 时,取 $[\sigma]=(0.4\sim0.6)\sigma_s$。如受动载荷,则再将这些许用应力降低 1/5 ~1/3。

起重用钢丝绳,由于提升重物时有一加速过程,实际受力比重物大;同时考虑到部分钢丝的折断、磨损、锈蚀以及弯曲变形等因素,因此按静载拉伸计算时其安全因数取得较大。对于人力驱动的起重钢丝绳,取 $n=4.5$;机器驱动时取 $n=5\sim6$;而对于载人用的钢丝绳则取 $n=9$。

由上可见,对各种不同情况下工作的构件,它们的安全因数或许用应力的差别是比较大的,须根据构件的具体情况来确定。

安全因数的选取。关系到构件的安全和经济,两者是矛盾的。应适当处理,将两者合理地统一起来。片面地将任一方面强调到不适当的程度,都是错误的。若片面地强调安全,采用过大的安全因数,就会造成构件的尺寸过大,这不仅浪费材料,而且会使设计出的机器或结构物粗笨。若不适当地强调经济,采用过小的安全因数,就会使构件尺寸过小,而不能保证构件的安全耐用,甚至造成事故。这都不符合设计要求。安全因数也不是固定不变的,随着我国工业技术的飞速发展,设计能力、工艺水平、材料产品质量的不断提高,以及人们对客观事物的进

一步认识，安全因数将会取得较小。

2. 强度条件

在确定了材料的安全因数或许用应力以后，就可以进行强度计算了。前面已述，为保证构件安全可靠地工作，必须使构件的工作应力不超过材料的许用应力。对于轴向拉伸和压缩的杆件，应满足的条件是

$$\sigma = \frac{F_N}{A} \leqslant [\sigma] \tag{1-10}$$

式中：σ——杆件横截面上的工作应力；

F_N——横截面上的轴力；

A——横截面面积；

$[\sigma]$——材料的许用应力。

这就是杆在轴向拉伸和压缩时的强度条件。对于等截面杆，如其上同时作用几个轴向外力，应选择最大轴力 $F_{N,max}$ 所在的横截面来计算；在轴力相同而横截面有变化时，则应计算截面面积最小处的强度。

根据强度条件，可以解决工程实际中有关构件强度的三个方面的问题。

(1) 强度校核

已知杆件的材料、截面尺寸和所承受的载荷，校核杆件是否满足强度条件式(1-10)。若能满足，说明杆件的强度足够；否则，说明杆件不安全。

(2) 选择截面

根据杆件所承受的载荷和材料的许用应力，确定杆件的横截面面积和相应的尺寸。这时强度条件可变换为以下的形式：

$$A \geqslant \frac{F_N}{[\sigma]}$$

由此式算出需要的横截面面积，然后确定截面尺寸。

(3) 确定许用载荷

根据杆件的截面尺寸和许用应力，确定杆件或整个结构物所能承担的最大载荷。这时可按下式计算杆件所允许的最大轴力：

$$F_N \leqslant A[\sigma]$$

从而确定结构物的许用载荷。

下面举例说明强度计算的方法。

例 1-5 上料小车如图 1-25a 所示，已知每根钢丝绳的拉力 $F_T = 105$ kN，拉杆的横截面面积 $A = 60 \times 100$ mm^2，材料为 Q235 钢，考虑到设备的重要性，取安全因数 $n = 4$。试校核拉杆的强度。

解：

(1) 计算拉杆的轴力　设横梁刚性较大，而拉杆比较细长，可认为两拉杆为轴向拉伸构

件。用截面法假想地将两杆截开，取上半部为研究对象，如图 1－25b 所示。由对称关系，两杆轴力相等，设为 F_N，则由平衡方程

$$\sum F_y = 0, \text{得 } F_N = F_T = 105\ \text{kN}$$

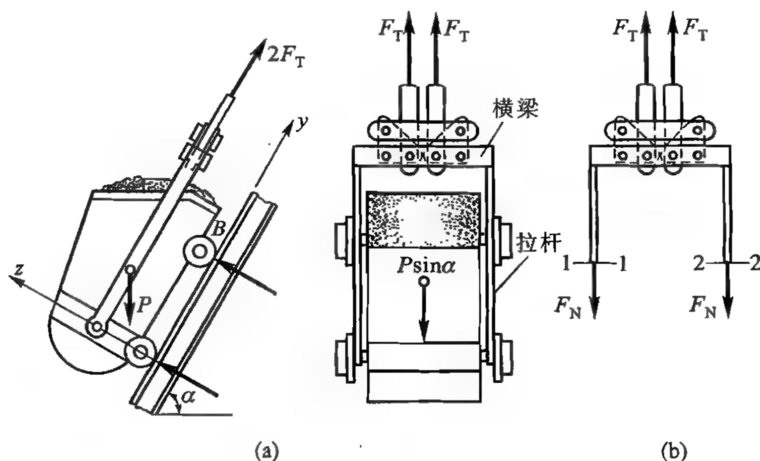


图 1－25

(2)计算拉杆横截面面积　由已给尺寸得

$$A = 60 \times 100\ \text{mm}^2 = 6\ 000\ \text{mm}^2 = 6 \times 10^{-3}\ \text{m}^2$$

(3) 确定许用应力　Q235 钢的屈服点为 $\sigma_s = 240$ MPa，则其许用应力为

$$[\sigma] = \frac{\sigma_s}{n} = \frac{240\ \text{MPa}}{4} = 60\ \text{MPa}$$

(4) 校核强度　由式(1－10)，得拉杆的工作应力为

$$\sigma = \frac{F_N}{A} = \frac{105 \times 1\ 000\ \text{N}}{6 \times 10^{-3}\ \text{m}^2} = 17.5 \times 10^6\ \text{Pa}$$

$$= 17.5\ \text{MPa} < [\sigma] = 60\ \text{MPa}$$

工作应力小于许用应力，所以拉杆安全。

例 1－6　一悬臂吊车，其结构和尺寸如图 1－26a 所示。已知电葫芦自重 $P = 5$ kN，起重量 $F = 15$ kN，拉杆 BC 采用 Q235 圆钢，其许用应力 $[\sigma] = 140$ MPa，横梁的自重不计，试选择拉杆的直径 d。

解：

(1) 计算拉杆轴力　A、B、C 三处为铰链连接，当电葫芦运行到 B 点时，杆 BC 所受的拉力最大，此时横梁 AB 也为二力杆。现求拉杆的轴力。

用截面法截取节点 B 为研究对象，并设二杆轴力分别为 F_{NAB} 和 F_{NBC} 如图 1－26b 所示。由平衡方程

$$\sum F_y = 0, \quad F_{NBC} \cdot \sin\alpha - (P + F) = 0$$

得

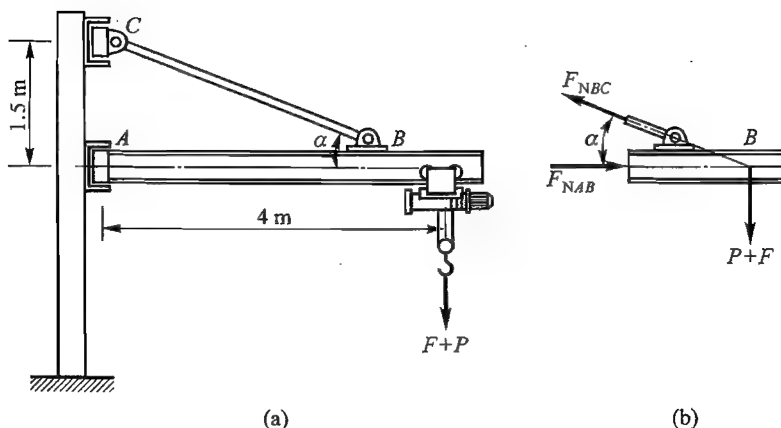


图 1－26

$$F_{NBC}=\frac{P+F}{\sin\alpha}$$

又由三角关系知

$$\sin\alpha=\frac{l_{AC}}{l_{BC}}=\frac{1.5}{\sqrt{1.5^2+4^2}}=0.352$$

代人上式得

$$F_{NBC}=\frac{(5+15)\ \text{kN}}{0.352}=56.8\ \text{kN}$$

（2）选择截面尺寸　由式(1－10)，拉杆横截面面积应为

$$A\geqslant\frac{F_{NBC}}{[\sigma]}=\frac{56.8\times1\ 000\ \text{N}}{140\ \text{MPa}}=406\ \text{mm}^2$$

在这里，注意 1 MPa = 1 N/mm² 的换算关系。因许用应力单位为 MPa，故将轴力单位换算为 N 后，所得面积单位为 mm²。

又因

$$A=\frac{\pi d^2}{4}$$

故拉杆直径为

$$d\geqslant\sqrt{\frac{4\times406\ \text{mm}^2}{3.14}}=22.8\ \text{mm}$$

最后可选用 $d=25$ mm 的圆钢。

例 1－7　图 1－27a 所示为一起重用吊环，其侧臂 AC 和 AB 各由两个横截面为矩形的锻钢杆构成，截面尺寸为 $h=120$ mm，$b=36$ mm，材料的许用应力为$[\sigma]=80$ MPa。为了发挥设备的最大作用，试按侧臂的强度，求吊环的最大起重量。

解：

（1）计算侧臂轴力　截取节点 A 为研究对象（图 1－27b），因对称关系，可设两杆轴力皆

为 F_N，再由平衡方程

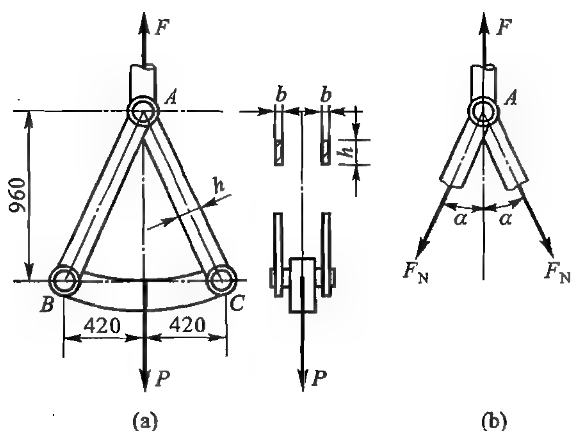


图 1－27

$$\sum F_y=0, P-2F_N\cos\alpha=0$$

得

$$F_N=\frac{P}{2\cos\alpha}$$

式中

$$\cos\alpha=\frac{960}{\sqrt{960^2+420^2}}=0.92$$

代入上式得

$$F_N=\frac{P}{2\times0.92}=0.544P$$

(2) 求许用载荷　由式(1－10)得

$$F_N\leqslant A[\sigma]$$

即

$$0.544\ P\leqslant 2(120\times36\times10^{-6})\times80\times10^6\ \text{N}$$

$$P\leqslant\frac{2(120\times36)}{0.544}\times80\ \text{N}$$

$$\leqslant 1\ 270\ 000\ \text{N}=1\ 270\ \text{kN}$$

故按侧杆强度，吊环的许用载荷为 1 270 kN。

* §1－7 拉伸和压缩静不定问题

1. 静不定的概念

在前面所讨论的问题中，构件的约束反力和杆件的内力都可以用静力学平衡方程求得。这种能用静力学平衡方程求解的问题，称为静定问题。

在工程实际中，有时为了增加构件和结构物的强度或刚度，或者由于构造上的需要，往往还给构件增加一些约束，或在结构物中增加一些杆件，这时构件的约束反力或杆件的内力，仅用静力学平衡方程就不能求解了。例如在例 1－2 中，如用三根钢丝绳吊运重物（图 1－28a），则为计算钢丝绳内力而截取的研究对象如图 1－28b 所示。这是一个平面汇交力系，可列出两个平衡方程（$\sum F_x=0$、$\sum F_y=0$），而未知力却有三个（F_{T1}、F_{T2}、F_{T3}），故不能求解。又如例 1－6 中的悬臂吊（图 1－26），为了减少横梁的弯曲变形，可再加一根拉杆 CD，其计算简图如图 1－29a 所示。为计算两拉杆的轴力，需取如图 1－29b 所示的研究对象，其上各力构成一个平面一般力系。可列出三个独立的平衡方程（如 $\sum F_x=0$、$\sum F_y=0$、$\sum M_A=0$）但未知力却有四个（F_{T1}、F_{T2}、F_{Ax}、F_{Ay}），也不能求解。这种未知力多于平衡方程，只用静力学平衡方程不能求解的问题，称为**静不定问题**。未知力数比平衡方程数多一个时，为一次静不定，多两个时为二次静不定，其余类推。

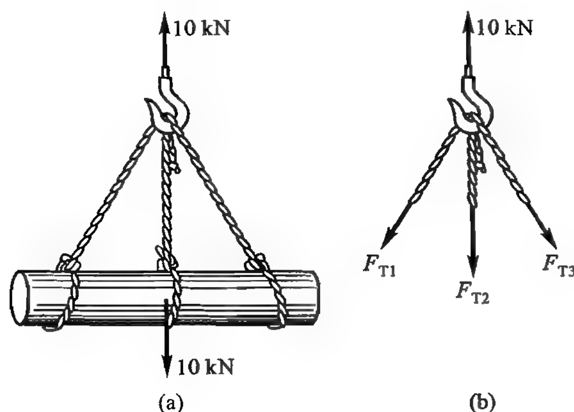


图 1－28

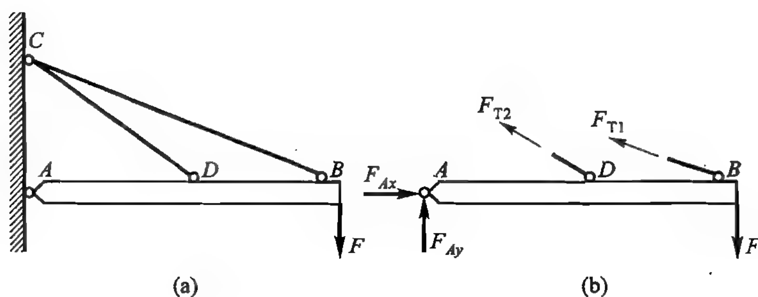


图 1－29

2. 静不定问题的解法

对一个拉压静不定问题作强度计算，必须先求出各杆的内力。下面通过一个例子来说明静不定问题的解法。

图 1－30a 所示的横梁，其左端铰接于 A，在 B、C 处与两铅垂杆 CD 和 BE 连接。设两杆的弹性模量和横截面面积分别为 E_1、E_2 和 A_1、A_2，在 B 端作用一载荷 F，横梁的自重不计，求拉杆 CD 和 BE 的轴力。

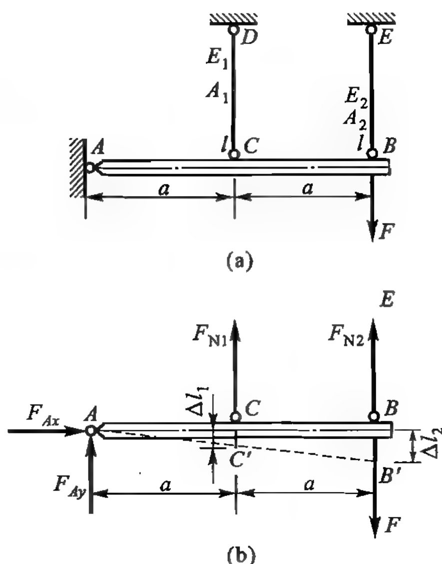


图 1－30

首先，取如图 1－30b 所示的研究对象。设两杆的轴力为 F_{N1}、F_{N2}。由受力图可见，这是一个平面一般力系，可列出三个平衡方程，而未知量却有四个，是一个一次静不定问题。求解此题时，可利用的平衡方程为：

$$\sum M_A = 0, aF_{N1} + 2aF_{N2} - 2aF = 0$$

即

$$F_{N1} + 2F_{N2} - 2F = 0 \qquad (a)$$

虽然还可以列出 $\sum F_x = 0$ 和 $\sum F_y = 0$ 两个方程，但这时又出现两个未知量 F_{Ax} 和 F_{Ay}，这不是所要求的，故可不再列出。

现在的问题是，仅用式(a)还不能解出 F_{N1} 和 F_{N2}，应设法列出一个补充方程。

我们知道，杆件受力后要变形，而在一个静不定结构系统中，各杆的变形是不能任意的，必须与其所受的约束相适应，它们之间必须互相协调，保持一定的几何关系；另一方面，杆件的变形又与其内力有关。因此，如果能找出各杆件变形间的关系，就可以建立各杆件的内力应保持的又一关系，从而得到补充方程。为此，再分析各杆间应满足的变形几何条件。

由于横梁 AB 的刚性比两拉杆大得多，它的弯曲变形可以不计，可以设想在力 F 作用下 AB 仍为一直线，仅倾斜了一个角度，如图 1－30b 所示。设两拉杆的伸长变形为 Δl_1 和 Δl_2，由变形后的位置可见，它们之间应保持这样的关系：

$$\frac{\Delta l_1}{a} = \frac{\Delta l_2}{2a}$$

即

$$2\Delta l_1 = \Delta l_2 \qquad (b)$$

这就是各杆件应满足的**变形几何条件**。

当应力不超过比例极限时，两杆的伸长与轴力间的关系，可由胡克定律式(1-2b)得到

$$\Delta l_1=\frac{F_{N1}l}{E_1A_1},\quad \Delta l_2=\frac{F_{N2}l}{E_2A_2} \tag{c}$$

这个关系是由杆件受力后所产生的物理现象所决定的，所以称为物理条件。

将式(c)代入式(b)，得

$$2\frac{F_{N1}l}{E_1A_1}=\frac{F_{N2}l}{E_2A_2}$$

即

$$F_{N2}=2\frac{E_2A_2}{E_1A_1}F_{N1} \tag{d}$$

这样，又建立了一个各轴力间的关系，得到了所需要的补充方程。

最后，联立求解(a)、(d)两式，得到

$$F_{N1}=\frac{2F}{1+4\dfrac{E_2A_2}{E_1A_1}},\quad F_{N2}=\frac{4F}{4+\dfrac{E_1A_1}{E_2A_2}}$$

当 $E_1=E_2, A_1=A_2$ 时，

$$F_{N1}=\frac{2}{5}F,\quad F_{N2}=\frac{4}{5}F$$

所得结果说明，在静不定问题中，杆件内力(或构件约束反力)不仅与载荷有关，还与杆件的抗拉(压)刚度 EA 之比值有关；而在静定问题中，它们仅与外力有关。这是静不定问题与静定问题的一个区别。

由上述的分析过程可以看出，求解静不定问题须考虑三个方面的关系：一是静力学平衡关系；二是变形几何关系；三是变形与力之间的物理关系。利用这三方面的关系列出有关方程，即可解出所求的内力或约束反力。这就是解静不定问题的一种方法。

解出各杆件的内力后，即可进行强度计算。强度计算的方法仍如前节所述，在此不再重复。

例 1-8 一根两端支承的杆件 AB，在 C 处受一轴向外力 F，如图 1-31a 所示。已知杆横截面面积 A，材料的弹性模量 E，试求在 A、B 两端的支座反力。

解：

(1) 列静力学平衡方程　解除两端约束，设其约束反力分别为 F_A、F_B，如图 1-31b 所示。由杆件的受力图可见，这是一个共线力系，可列出平衡方程：

$$\sum F_y=0,\quad F_A+F_B-F=0 \tag{a}$$

但式中有 F_A、F_B 两个未知量，故为一个一次静不定问题。

(2) 列变形几何条件　设杆受力 F 作用后，C 点移至 C'，但在原有约束条件下，杆 AB 的长

度应保持不变,故此时 AC 段的伸长 Δl_{AC}与 CB 段的缩短 Δl_{CB}应该相等。由此得变形几何条件:

$$\Delta l_{AC}=\Delta l_{CB}=\Delta l \tag{b}$$

(3) 列物理条件　由胡克定律:

$$\Delta l_{AC}=\frac{F_A\cdot 2a}{EA},\quad \Delta l_{CB}=\frac{F_B\cdot a}{EA} \tag{c}$$

(4) 建立补充方程,解出约束反力　将式(c)代入式(b),得补充方程

$$\frac{F_A\cdot 2a}{EA}=\frac{F_B\cdot a}{EA}$$

即

$$2F_A=F_B \tag{d}$$

联立解式(a)和式(d),得:

$$F_A=\frac{F}{3},\quad F_B=\frac{2F}{3}$$

在此题中,由于 AC、CB 二段的材料和横截面面积相同,故支座反力与 EA 无关。但由于两段长度不等,在补充方程中得出了 $2F_A=F_B$的关系,如果改变力 F 的作用位置,F_A和 F_B之值也将随之而变。由此可见,在静不定问题中,杆的有关长度对计算结果还有影响。

3. 温度应力和残余应力概念

在工程实际中,许多构件或结构物往往会遇到温度变化的情况,这时杆件会产生伸长或缩短。在静定问题中,由于杆件因温度变化而引起的变形未受到什么限制,所以不会在杆内引起应力;但在静不定问题中,由于约束增加,因温度变化而引起的变形将会受到阻碍,相应的在杆中就会引起应力。这种由于温度变化而引起的应力,称为**温度应力**。

例如图 1-32a 所示的杆件,A 端与支承面连接,B 端自由,这是一个静定支承方式。当温度变化时,B 端可以自由地伸长或缩短,在杆内不会引起应力。如

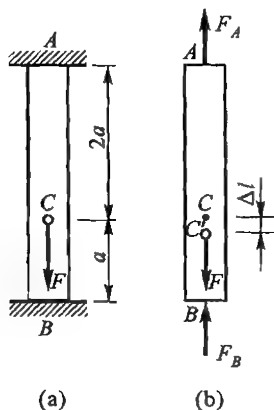


图 1-31

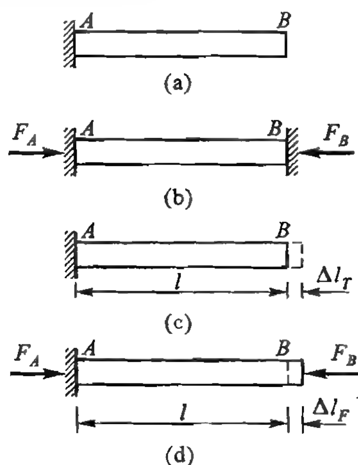


图 1-32

果杆件两端与两个支承面连接(图 1－32b)，这就成为一个静不定支承方式。当温度升高时，因两个支承面的阻挡，使杆不能自由地伸长，被强制维持原来的长度，这时两支承面就产生了约束反力。这相当于杆因温度升高而引起的伸长(图 1－32c)，需由约束反力将其压缩回去，使杆保持原来长度(图 1－32d)。因此，杆内将引起应力。

杆件的温度应力，可按静不定问题的解法求得。下面通过例题来说明。

例 1－9 设一根两端支承的杆 AB(图 1－32b)，其长度为 l，横截面面积为 A。又已知材料的弹性模量 E 和线膨胀系数 α，求温度升高 ΔT 后杆的温度应力。

解：

(1) 列平衡方程 设 A、B 两端的支座反力为 F_A和 F_B，则由平衡方程

$$\sum F_x = 0, \quad F_A - F_B = 0$$

得

$$F_A = F_B = F \tag{a}$$

此式只能说明两支座反力相等，但不能解出其值。

(2) 列变形几何条件 设因温度而引起的伸长为 Δl_T，因轴向压力而引起的缩短为 Δl_F，由于杆 AB 长度没有变化，故两者必然相等，得变形几何条件

$$\Delta l_T = \Delta l_F \tag{b}$$

(3) 列物理条件 由变形与力和温度间的物理关系：

$$\Delta l_T = \alpha \Delta T l \tag{c}$$

$$\Delta l_F = \frac{Fl}{EA} \tag{d}$$

(4) 建立补充方程，解出温度应力 将式(c)、式(d)代入式(b)得

$$\alpha \cdot \Delta T \cdot l = \frac{Fl}{EA}$$

故

$$F = \alpha EA \Delta T$$

杆横截面的温度应力为

$$\sigma = \frac{F}{A} = \alpha E \Delta T$$

在厂矿中输送高压蒸汽时，如在蒸汽锅炉与使用车间之间用直线管道输送，则蒸汽管道就相当于两端固定的直杆。设钢管的弹性模量 $E = 200$ GPa，线膨胀系数 $\alpha = 12.5 \times 10^{-6}$ ℃$^{-1}$，则当温度升高 $\Delta T = 40$ ℃时，将引起的温度应力为

$$\sigma = \alpha E \Delta T = 12.5 \times 10^{-6} \times 200 \times 40 \text{ GPa} = 0.1 \text{ GPa} = 100 \text{ MPa}$$

可见温度应力不可忽视。如温度应力过大，可能将管道顶弯或将两端的固定装置顶坏。因此工程实际中每隔一定距离常将管道弯成一个伸缩节(图 1－33)，让管道有可能

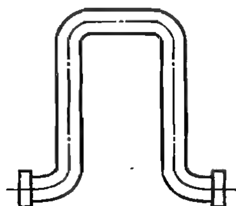


图 1－33

自由伸缩，从而减小或避免温度应力。

由上所述可见，一个静不定构件，虽然未受外力作用，但在温度变化的情况下，也会引起应力。同样，一个构件即使没有约束，若在局部区域温度发生变化，亦可能产生温度应力。如果温度应力不超过材料的弹性极限，在温度因素消除后，温度应力也随之消失；若温度应力超过弹性极限而使构件产生塑性变形，构件将产生残余应力。

现以图 1 - 34 所示钢板焊接时的情况为例，说明残余应力的产生过程。焊接时，钢板横截面的温度分布情况如图 1 - 34a 所示，在焊缝处的温度最高。此时距固定端 x 处的某一横截面 $m-m$ 应被膨胀至 $abcde$ 的曲线位置，但因钢板一端固定，另一端还有相当的长度，由于这些约束，横截面仍保持为一平面，因此，它只能均匀地位移一个 λ 值。于是 bcd 部分的变形受到限制而产生压缩温度应力；ab 和 de 部分则被拉长而产生拉伸温度应力。其中，bcd 部分的变形最大，它不仅有弹性变形，还包括塑性变形。当焊接结束，钢板温度均匀后，由于 fcg 部分曾产生了缩短的塑性变形，故应恢复到比原长 x 较小的位置 $b'c'd'$；而其他部分因只有弹性变形，应恢复至原长 x 的 $a'b'$、$d'e'$处，如图 1 - 34b 所示。但由于截面仍须保持为一平面，实际上横截面上各点将均匀地收缩至比原长小 λ'的位置 $m'-m'$。此时，中间部分被拉至平面 $m'-m'$而产生拉应力；两侧部分被压至平面 $m'-m'$而产生压应力（图 1 - 34b）。这些应力将被长期保持下去。在外界因素（如温度）消除后而长期保持下来的这种应力称为残余应力。

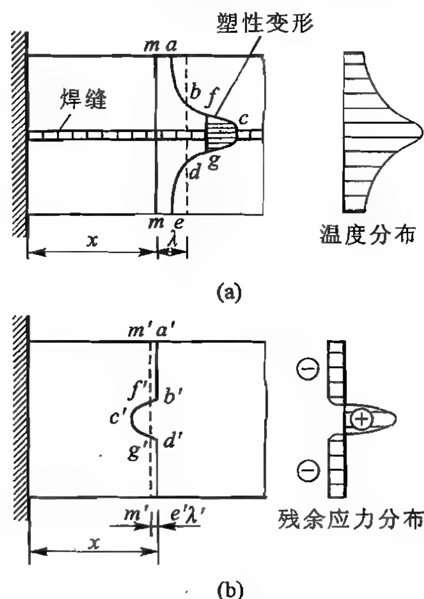


图 1 - 34

在热加工过程中，也会不同程度地引起工件的残余应力。例如工件在骤冷的情况下，由于表层材料与心部材料的冷却速度不同，就会形成残余应力。残余应力过大会使工件产生严重的变形，甚至使工件断裂，因此需要设法加以控制，或进行退火、回火等热处理来消除残余应力。

§1 - 8 应力集中的概念

在 §1 - 3 中，曾经导出拉（压）杆横截面上正应力是均匀分布的结论。对于

等截面直杆或截面变化缓和的杆件，这个结论是正确的；但对于截面尺寸有急剧变化的杆件，例如有开孔、沟槽、肩台和螺纹的构件，在截面突变处，横截面上的应力则不再均匀分布。在孔槽等附近，应力急剧增加；距孔槽相当距离后，应力又趋于均匀。这种在局部区域应力突然增大的现象，称为应力集中。例如，等截面平板中间开孔和圆杆切槽时，其应力分布情况如图 1－35 所示。在离孔槽一定距离的 2－2 截面上，应力均匀分布；而在通过孔槽的 1－1 截面上，则有应力集中现象，在孔槽附近的小范围内应力要比其他部位的应力大得多。这种现象，可以通过一个简单的试验来说明。取一个中间开孔的扁平橡皮，在其表面上画上均匀的网格，拉伸后可以看到：在圆孔附近网格的变形比其他部位显著地增大；而在离圆孔较远的地方网格的变形均匀。这说明在圆孔附近有应力集中现象。

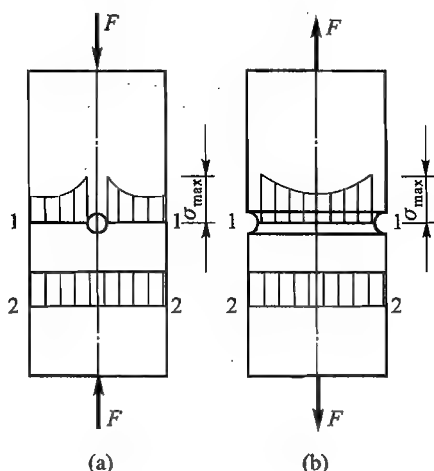


图 1－35

如果假设在削弱了的截面上应力均匀分布，并由此算出其平均应力 σ_m，则该截面上的最大应力 σ_{max} 与平均应力 σ_m 的比值称为应力集中因数，以 k 表示，即

$$k=\frac{\sigma_{max}}{\sigma_m} \tag{1-11}$$

应力集中因数之值主要通过试验方法来测定，有的可由理论分析求得，在工程设计手册等资料中有图表可查。截面变化愈急剧，应力集中因数愈大，对带圆孔的平板，拉伸时的 k 值最大可达 3。利用应力集中因数，可以求出最大应力。

对于有应力集中的构件，往往可以利用降低许用应力的办法来进行强度计算。但由于不同材料对应力集中的敏感程度不同，在某些情况下可以不考虑应力集中的影响。对于塑性材料，当应力集中处的最大应力到达屈服点后，仅在局部出现塑性变形；而其他大部分材料的变形仍处于弹性范围内，因而限制了局部处塑性变形的发展，使最大应力也不再升高。因此，这时并不引起整个构件的破坏。只有当载荷继续增加，其他部位的应力逐渐升高，使塑性变形区域扩大到整个截面时，才会使构件破坏。可见屈服现象有缓和应力集中的作用。所以在传统设计中，在静载荷下对中、低强度钢等塑性材料可不考虑应力集中的影响。脆性材料对应力集中的反映则比较敏感，由于它没有屈服阶段，当局部处的最大应力到达抗拉强度时，构件在该处即开始出现裂纹，在裂纹根部又产生更严重的应力集中，使裂纹迅

速扩大而导致构件断裂。因此,对脆性材料和高强度钢等塑性较低的材料,则须考虑应力集中的影响。但是对于铸铁,由于其组织极不均匀,缺陷很多,在内部已存在许多引起严重应力集中的因素,在测定其抗拉强度时,已经反映了这些因素的影响,因此,由构件外形变化而引起的应力集中,就可以不再考虑了。

在这里,再讨论一下应力的定义问题。

在我们讨论应力集中时,可能发现,当构件内的应力非均匀分布时,再用“单位面积上的内力”这一概念来定义应力,已不能确切地说明内力的聚集程度了。因为在此情况下,即使将单位面积取得再小,其上的内力也不均匀分布,在这个极小的面积内,各处内力的聚集程度仍不相同。这时就应该运用极限概念来定义应力。

设一截面上的应力如图 1-36 所示,为了确切地说明某一点 M 处内力的聚集程度,围绕 M 点取一微面积 ΔA,设分布于其上的内力合力为 ΔF,则在此微面积上的平均应力为

$$\sigma_m = \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

当 ΔA 趋于零时,则此比值的极限

$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \qquad (1-12)$$

即为该点处的正应力。运用这一定义,在应力非均匀分布的情况下,可以更确切地表示出截面上各点的应力。

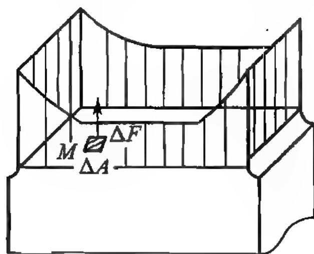


图 1-36

应该指出,在用极限概念来定义应力时,已经运用了材料连续性的假设。因为只有在材料连续的情况下,当微面积 ΔA 趋于零时,微内力 ΔS 才是连续变化的。

同理,对于非均匀变形的构件(例如铅垂悬挂的长杆因自重而引起的变形),各处的应变也是不相同的,这时对线应变的定义也应该用极限的概念来理解,在此就不多述了。

§1-9 应变能的概念

一个弹性体受力后要发生变形,同时外力在相应的位移上作了功;而当外力逐渐卸去时,变形也随之消失,在这个过程中,弹性体又可以对外作功。例如,被拧紧了的钟表发条,在放松的过程中可以带动钟表运转,就是这个道理。这说明一个弹性体在受力后发生变形的同时,在其内部积蓄了一种能量,使弹性体具有作功的本领。这种能量称为**应变能**。

在变形过程中，如不考虑能量的损失，积蓄在弹性体内的应变能E_ε在数值上等于外力所作的功 W，即

$$E_\varepsilon = W \tag{1-13}$$

根据这个关系，只需计算出外力所作的功，便可知道积蓄在弹性体内的应变能有多少。

设一拉杆如图 1－37a 所示，在静载荷 F 的作用下，逐渐伸长了 Δl，根据胡克定律，Δl 与 F 为线性关系。如图 1－37b 所示，设外力为 F'时，变形增加了 $d(\Delta l)$，此时拉力 F'所作的功为

$$dW = F'd(\Delta l)$$

当外力由零增至 F，即变形由零增至 Δl 时，外力所作的功则为

$$W = \int_0^{\Delta l} F'd(\Delta l)$$

上式积分的结果即为图 1－37b 中阴影部分的三角形面积。故

$$W = \frac{1}{2}F\Delta l$$

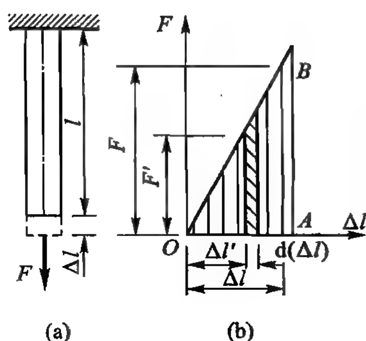


图 1－37

由式(1－13)知，这就是杆内的应变能，即

$$E_\varepsilon = \frac{1}{2}F\Delta l$$

由于此时杆的轴力 $F_N = F$，则上式又可表为：

$$E_\varepsilon = \frac{1}{2}F_N\Delta l \tag{1-14}$$

以胡克定律式(1－2b)代入，得

$$E_\varepsilon = \frac{F_N^2 l}{2EA} \tag{1-15}$$

这就是拉杆应变能的计算式。

由于在轴向拉伸或压缩时，杆各部分的受力和变形情况都相同，故可将杆的应变能除以杆的体积 Al，得到杆在单位体积内的应变能，称为应变能密度，以 v_ε 表示，其计算式为

$$v_\varepsilon = \frac{\frac{1}{2}F_N\Delta l}{Al} = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon \tag{1-16}$$

或

$$v_\varepsilon = \frac{1}{Al}\cdot\frac{F_N^2 l}{2EA} = \frac{\sigma^2}{2E} \tag{1-17}$$

以上的结果,也同样适用于轴向压缩的情况。

在拉伸(压缩)试验中,我们知道,当试样横截面上的应力到达某一极限时,材料将发生屈服或断裂。因而在强度计算中可以通过应力来判断构件是否安全。同样,由能量的观点来看,也可以通过应变能密度来判断。关于这一点在第七章还会谈到。

工程实际中常利用应变能计算构件或结构物的变形或位移。下面通过一个例子来说明。

例 1-10 一结构如图 1-38a 所示,已知两杆长 l,横截面面积为 A,材料的弹性模量为 E。试求在力 F 作用下节点 A 的位移。

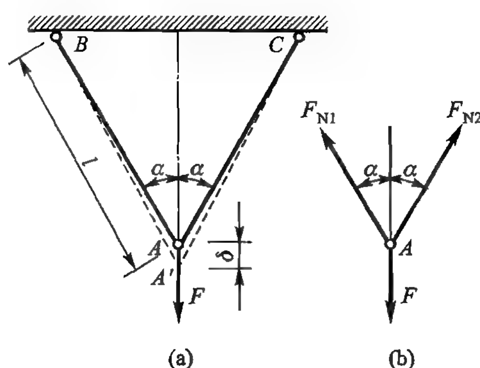


图 1-38

解:由式(1-13),外力所作的功应等于杆件内所积蓄的应变能,即

$$E_{\varepsilon}=W \tag{a}$$

由对称关系知,A 点只有铅垂位移,设为 δ,则力 F 所作之功为

$$W=\frac{F\delta}{2} \tag{b}$$

取节点 A 为研究对象(图 1-38b),由平衡方程 $\sum F_y=0$ 可得两杆的内力为

$$F_{N1}=F_{N2}=\frac{F}{2\cos\alpha}=F_N \tag{c}$$

又由式(1-15),两杆所积蓄的应变能为

$$E_{\varepsilon}=2\times\frac{F_N^2 l}{2EA}=\frac{F_N^2 l}{EA}$$

即

$$E_{\varepsilon}=\frac{\left(\frac{F}{2\cos\alpha}\right)^2 l}{EA}=\frac{F^2 l}{4EA\cos^2\alpha} \tag{d}$$

将式(b)、式(d)代入式(a)得

$$\frac{F\delta}{2}=\frac{F^2 l}{4EA\cos^2\alpha}$$

由此解得节点 A 的铅垂位移为

$$\delta=\frac{Fl}{2EA\cos^2\alpha}$$



小　结

本章所介绍的内容及方法，极为重要。因为它将影响对整个材料力学的学习，如：内力、应力、变形和应变等重要概念，也是材料力学这门课程的基本概念。计算内力的截面法，推导应力公式的分析方法，强度计算的几类问题等，在后面的学习中，对于其他变形形式也适用。

1. 本章所介绍的重要概念有：内力、应力、变形和应变等，这是材料力学的一些基本概念。

求内力的方法是截面法，这是材料力学的一个基本方法。

在轴向拉伸和压缩时，计算应力、变形和应变的公式是：

正应力公式 $$\sigma=\frac{F_N}{A}$$

胡克定律 $$\Delta l=\frac{F_N l}{EA},\quad \varepsilon=\frac{\sigma}{E}$$

对这些概念、方法和公式要能正确理解，熟练掌握。

2. 材料的力学性能的研究是解决强度和刚度问题的一个重要方面。研究材料的力学性能的方法是试验，其中拉伸试验是最主要和最基本的一种试验，由它所测定的材料的性能指标有：

E——材料抵抗弹性变形能力的指标；

$\sigma_s(\sigma_{0.2})$、$\sigma_b(\sigma_c)$——材料的强度指标；

δ、ψ——材料的塑性指标。

低碳钢的拉伸试验是一个典型试验，它所表现出的力学性能比较全面。掌握好这一试验，通过对比，对其他材料的力学性能就易于理解了。

3. 强度计算是材料力学研究的主要问题。轴向拉伸和压缩构件的强度条件是

$$\sigma=\frac{F_N}{A}\leqslant[\sigma]$$

强度计算一般可按以下的步骤进行：

(1) 外力分析　这主要是分析构件所受外力的全部情况，明确构件的受力特点(例如，是否为轴向拉伸或压缩)，求出有关外力，作为分析计算的依据。

(2) 内力计算　用截面法揭示出构件横截面上的内力，并用平衡条件确定内力的大小和方向。

(3) 强度计算　利用强度条件，进行强度校核、选择截面或确定许用载荷。

(4) 利用强度条件进行三方面的计算，这是本章解题的主要类型。

① 强度校核(如例1-5)。

② 选择截面(如例1-6)。

③ 确定许用载荷(如例1-7)。

这三类问题的基本公式都是由强度条件派生的，但已知和未知条件不尽相同。对于由拉压杆构件组成的结构，在计算承载能力时，结构中各杆件并不是同时达到危险状态，所以其许用载荷是由最先达到许用轴力的杆的强度所决定，通常是以各杆达到许用轴力时，对应的许用载荷中的最小值为许用载荷。

4. 本章研究问题的方法，是科学试验和理论分析相结合的方法。研究材料力学问题，尤其是研究材料的力学性能，离不开科学试验。对一些计算公式的推导，例如正应力公式的推导，也必须在试验的基础上进行。先由试验现象了解其中的规律，作出科学的推断和归纳；然后通过理论推导得出计算公式。理论推导所得出的结论，也要经过试验或实践的检验，才能说明其是否正确。

5. 通过本章的学习，应当注意，在学习材料力学时，有许多与静力学不同之处：

(1) 在静力学中，构件的变形对计算的影响极微，可以忽略不计，故将研究对象视为刚体；而在材料力学中分析构件的强度和刚度时，则必须考虑构件的变形，所以应将研究的对象视为可变形固体。

(2) 静力学中求约束反力时，是解除构件的约束，取整个构件为研究对象；材料力学中求构件的内力时，是用截面法截取构件的一部分为研究对象。

(3) 在静力学中列平衡方程时，是根据力在坐标中的方向来规定正负号的；在材料力学中则是根据构件的变形情况来规定相应内力和应力等正负号。

(4) 材料力学中所指的内力是物体内部一部分与另一部分间的相互作用力；静力学中所指的内力是物体系中各构件间的相互作用力。

以上的几个区别，在学习中要随时加以注意。但这些区别也不是绝对的，例如在材料力学中列平衡方程时仍使用了静力学的正负号规定；在静力学中的桁架计算，也使用了材料力学中的截面法。



思考题

1-1 试辨别下列构件(图1-39)哪些属于轴向拉伸或轴向压缩。

1-2 根据自己的实践经验，举出工程实际中一些轴向拉伸和压缩的构件。

1-3 指出下列概念的区别：

(1) 内力与应力；

(2) 变形与应变；

(3) 弹性与塑性；

(4) 弹性变形与塑性变形；

(5) 极限应力与许用应力。

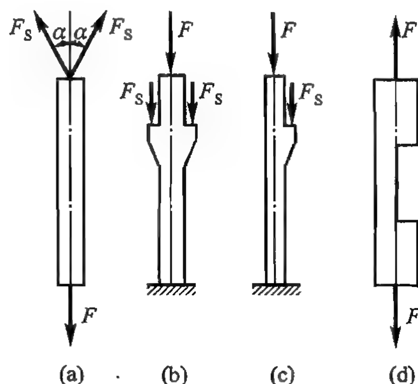


图 1-39

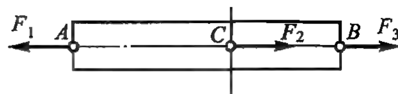


图 1-40

1-4 一杆如图 1-40 所示用截面法求轴力时，可否将截面恰恰截在着力点 C 上，为什么？

1-5 在静力学中介绍的力的可传性，在材料力学中是否仍然适用？为什么？

1-6 设两根材料不同，截面面积不同的拉杆，受相同的轴向拉力，它们的内力是否相同？

1-7 轴力和截面面积相等而截面形状和材料不同的拉杆，它们的应力是否相等？

1-8 钢的弹性模量 $E=200$ GPa，铝的弹性模量 $E=71$ GPa。试比较在同一应力作用下，哪种材料的应变大？在产生同一应变的情况下，哪种材料的应力大？

1-9 已知 Q235 钢的弹性极限 $\sigma_p=200$ MPa，弹性模量 $E=200$ GPa，现有一 Q235 钢的试样，其应变已被拉到 $\varepsilon=0.002$，是否由此可知其应力为

$$\sigma=E\varepsilon=200\times10^9\times0.002\ \text{Pa}=400\times10^6\ \text{Pa}=400\ \text{MPa}$$

1-10 在低碳钢的应力-应变曲线上，试样断裂时的应力反而比开始颈缩时的应力低，为什么？

1-11 图 1-41 所示的铅垂直杆在自重作用下各处的变形是不同的。这时如在距下端 y 处取一微段 Δy，设其伸长为 Δv，试问在 y 处的应变 ε 应如何定义？

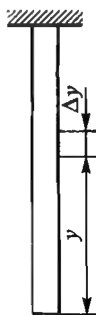


图 1-41

1-12 经冷作硬化（强化）的材料，在性能上有什么变化？在应用上有什么利弊？

1-13 在拉伸和压缩试验中，各种材料试样的破坏形式有哪些？试从宏观上大致分析其破坏的原因。

1-14 在钢材的力学性能中，有哪两项强度指标？有哪两项塑性指标？它们的意义何在？

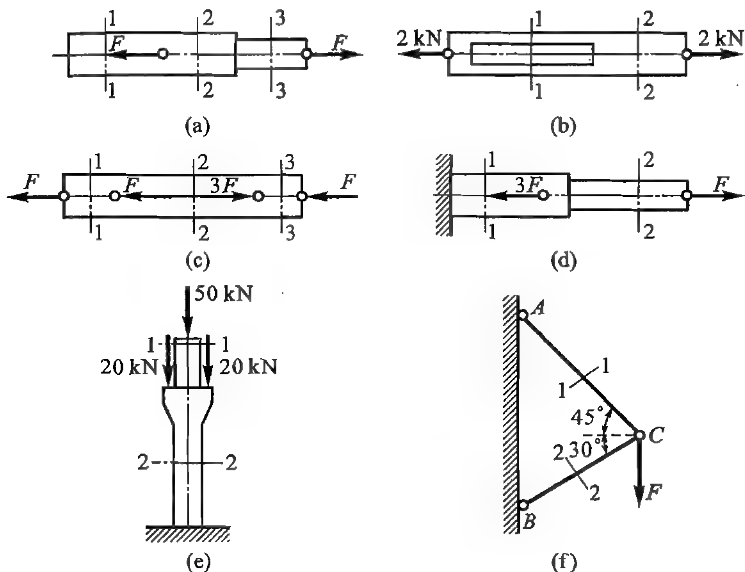
1-15 何谓应力集中？应力集中对杆件的强度有何影响？

1-16 静不定问题有什么特点？在工程实际中如何利用这些特点？解静不定问题的一般步骤是什么？在画变形图和受力图时，要特别注意什么关系？

1-17 在有输送热气管道的工厂里，其管道不是笔直铺设的，而是每隔一段距离，就将管道弯成一个伸缩节，为什么？

习　题

1-1 试用截面法求下列各杆指定截面的轴力。



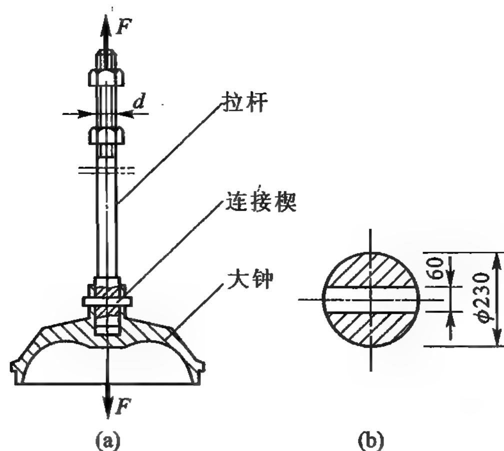
题 1-1 图

1-2 高炉装料器中的大钟拉杆如图 a 所示，拉杆下端以连接楔与大钟连接，连接处拉杆的横截面如图 b 所示；拉杆上端螺纹的小径 $d = 175$ mm。已知作用于拉杆上的静拉力 $F = 850$ kN，试计算大钟拉杆横截面上的最大静应力。

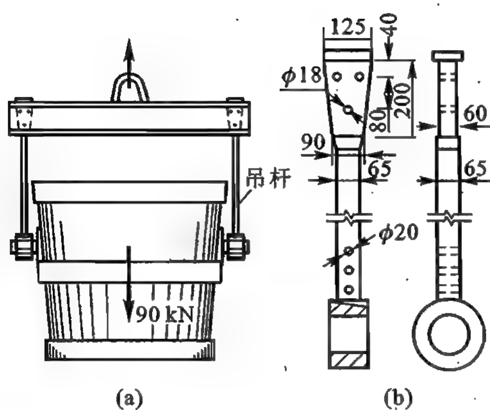
1-3 试计算图 a 所示钢水包吊杆横截面上的最大应力。已知钢水包及其所盛钢水共重 90 kN，吊杆的尺寸如图 b 所示。

1-4 一桅杆起重机如图所示，起重杆 AB 为一钢管，其外径 $D = 20$ mm，内径 $d = 18$ mm；钢绳 CB 的横截面面积为 10 mm^2。已知起重量 $F = 2\ 000$ N，试计算起重杆和钢丝绳横截面上的应力。

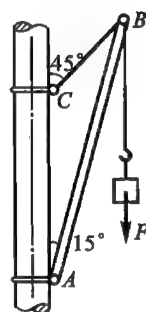
1-5 图 a 所示为一斗式提升机。斗与斗之间用链条连接，链条的计算简图如图 b 所示，每个料斗连同物料的总重量 $F = 2\ 000$ N。钢链由两层钢板构成，如图 c 所示。每个链板厚 $t = 4.5$ mm，宽 $h = 40$ mm，$H = 65$ mm，钉孔直径 $d = 30$ mm。试求链板横截面上的最大应力。



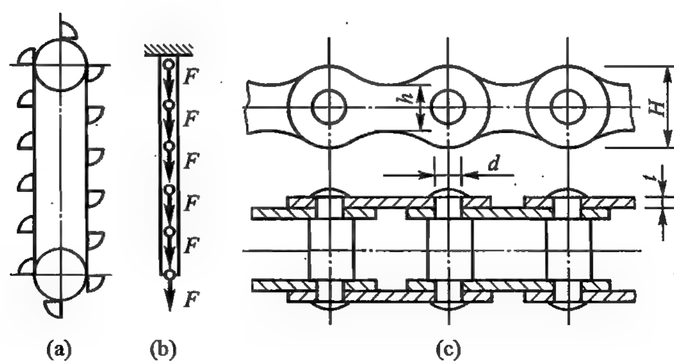
题 1－2 图



题 1－3 图



题 1－4 图



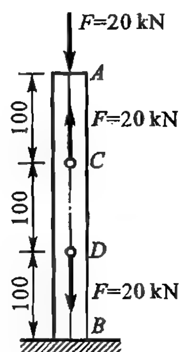
题 1－5 图

1-6 一长为 300 mm 的钢杆，其受力情况如图所示。已知杆横截面面积 $A=1\ 000\ \text{mm}^2$，材料的弹性模量 $E=200$ GPa，试求：

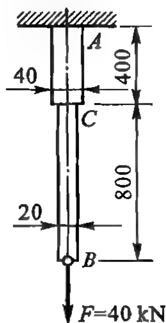
(1) AC、CD、DB 各段横截面上的应力和纵向变形；

(2) AB 杆的总纵向变形。

1-7 一圆截面阶梯杆受力如图所示，已知材料的弹性模量 $E=200$ GPa，试求各段的横截面上应力和纵向应变。



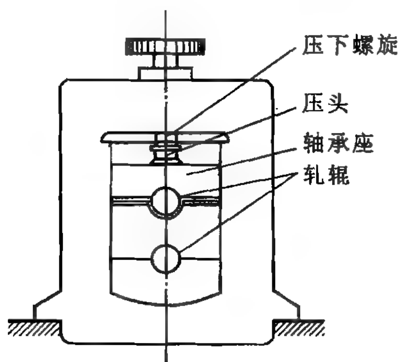
题 1-6 图



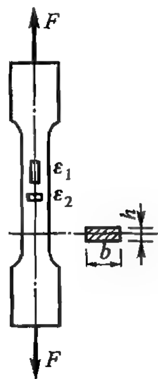
题 1-7 图

1-8 为测定轧钢机的轧制力，在压下螺旋与上轧辊轴承座之间装置一测压力用的压头。压头是一个钢制的圆筒，其外径 $D=50$ mm，内径 $d=40$ mm，在压头的外表面上沿纵向贴有测变形用的电阻丝片。若测得轧辊两端两个压头的纵向应变均为 $\varepsilon=0.9\times10^{-2}$，试求轧机的总轧制力。压头材料的弹性模量 $E=200$ GPa。

1-9 用一板状试样进行拉伸试验，在试样表面贴上纵向和横向的电阻丝片来测定试样的应变。已知 $b=30$ mm，$h=4$ mm；每增加 3 000 N 的拉力时，测得试样的纵向应变 $\varepsilon_1=120\times10^{-6}$，横向应变 $\varepsilon_2=-38\times10^{-6}$。求试样材料的弹性模量 E 和泊松比 μ。



题 1-8 图



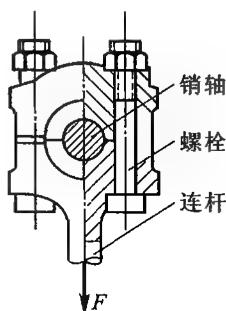
题 1-9 图

1-10 连杆端部与销轴相连，其构造如图所示。设作用于连杆的轴向外力 $F=128$ kN，螺栓螺纹处的小径 $d=37$ mm，螺栓材料的许用应力 $[\sigma]=60$ MPa，试校核螺栓的强度。

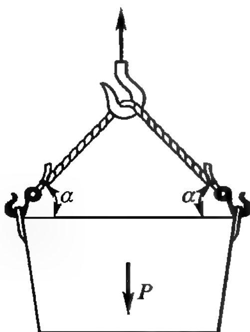
1-11 用绳索吊运一重 $P=20$ kN 的重物。设绳索的横截面面积 $A=1\ 260\ \text{mm}^2$，许用应力 $[\sigma]=10$ MPa，试问：

(1) 当 $\alpha=45°$时，绳索强度是否够用？

(2) 如改为 $\alpha=60°$，再校核绳索的强度。



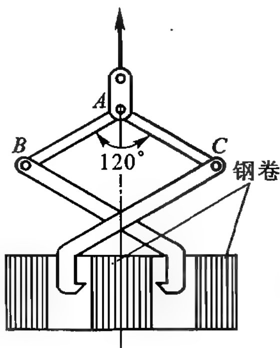
题 1-10 图



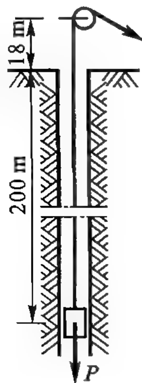
题 1-11 图

1-12 图示一板卷夹钳同时夹吊两个钢卷，已知每个钢卷重 100 kN；AB 与 AC 两杆夹角为 120°，其横截面为 $100\times150\ \text{mm}^2$ 的矩形；材料的许用应力 $[\sigma]=80$ MPa。试校核两杆的强度。

1-13 某金属矿矿井深 200 m，井架高 18 m，其提升系统简图如图所示。设罐笼及其装载的矿石共重 $P=45$ kN，钢丝绳自重为 $p=23.8$ N/m；钢丝绳横截面面积 $A=251\ \text{mm}^2$，抗拉强度 $\sigma_b=1\ 600$ MPa。设取安全因数 $n=7.5$，试校核钢丝绳的强度。



题 1-12 图

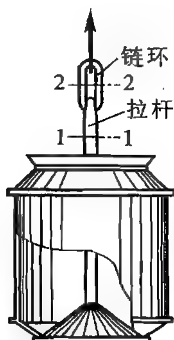


题 1-13 图

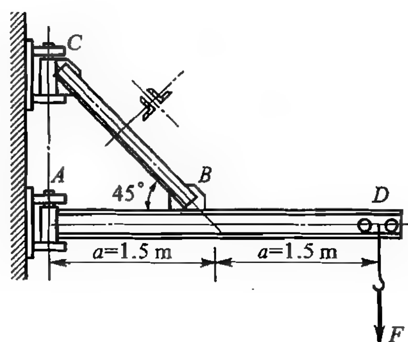
1-14 化铁炉的上料罐如图所示，罐自重 10 kN，装料 20 kN。试计算拉杆和链环拉伸

部分所需的直径。材料的许用应力[σ] = 120 MPa。

1－15 悬臂吊车的尺寸和载荷情况如图所示。斜杆 BC 由两角钢组成，载荷 F = 25 kN。设材料的许用应力[σ] = 140 MPa，试选择角钢的型号。



题 1－14 图



题 1－15 图

1－16 图示一手动压力机，在工件上所加的最大压力为 150 kN。已知立柱和螺杆所用材料的屈服点 σ_s = 240 MPa，规定的安全因数 n = 1.5。

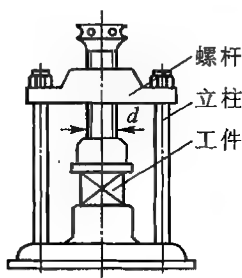
(1) 试按强度要求选择立柱的直径 D；

(2) 若螺杆的小径 d = 40 mm，试校核其强度。

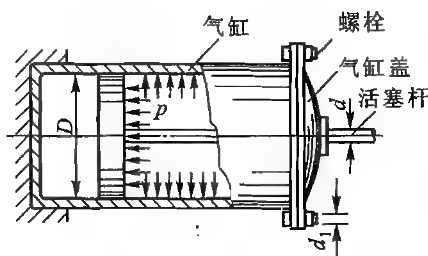
1－17 一气缸如图所示，其内径 D = 560 mm，气缸内的气体压强 p = 2.5 N/mm^2，活塞杆直径 d = 100 mm，所用材料的屈服点 σ_s = 300 MPa。

(1) 试求活塞杆的正应力和工作安全因数；

(2) 若连接气缸与气缸盖的螺栓直径 d_1 = 30 mm，螺栓所用材料的许用应力[σ] = 60 MPa，试求所需的螺栓数。



题 1－16 图

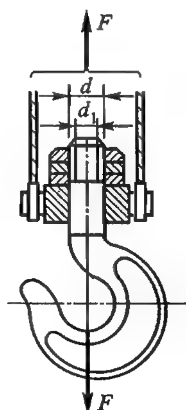


题 1－17 图

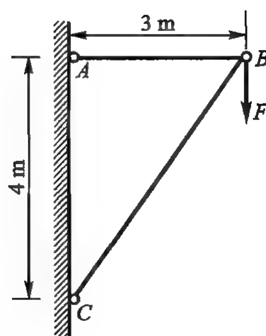
1－18 起重吊钩上端借助螺母支搁，吊钩螺纹部分的大径 d = 63.5 mm，小径 d_1 = 55 mm；材料为 20 钢，许用应力[σ] = 50 MPa。试根据吊钩螺纹部分的强度确定吊钩的许用起重量 F。

1－19 如图所示结构的 AB 杆为钢杆，其横截面面积 A_1 = 600 mm^2，许用应力[σ] =

140 MPa;BC 杆为木杆，横截面面积 $A_2=30\ 000\ \text{mm}^2$，许用压应力 $[\sigma_c]=3.5\ \text{MPa}$。试求最大许可载荷 F。



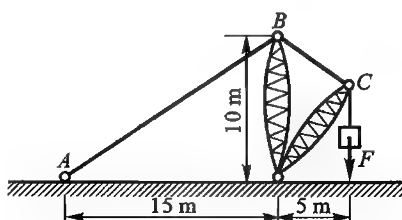
题 1-18 图



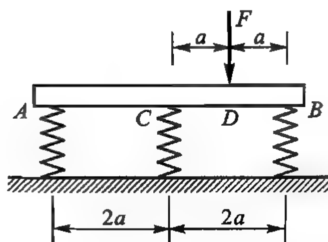
题 1-19 图

1-20 起重机如图所示，钢丝绳 AB 的横截面面积为 500 mm^2，许用应力 $[\sigma]=40\ \text{MPa}$。试根据钢丝绳的强度求起重机的许用起重量 F。

1-21 一不变形的刚性梁 AB 搁于三个相同的弹簧上，在梁上 D 处作用一力 F，如图所示。设已知弹簧刚性系数 $C\left(=\dfrac{S}{\Delta l}\right)$，试求 A、B、C 处三个弹簧各受力多少？



题 1-20 图

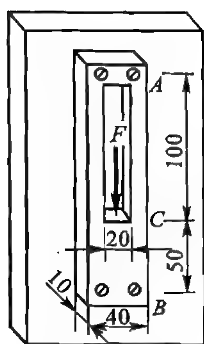


题 1-21 图

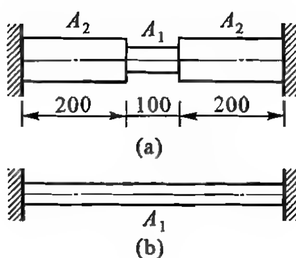
1-22 如图所示为一中间切槽的钢板，以螺钉固定于刚性平面上，在 C 处作用一力 $F=5\ 000\ \text{N}$，有关尺寸如图所示。试求此钢板横截面上的最大应力。

1-23 两钢杆如图所示，已知横截面面积 $A_1=100\ \text{mm}^2$，$A_2=200\ \text{mm}^2$；材料的弹性模量 $E=210\ \text{GPa}$，线膨胀系数 $\alpha=12.5\times10^{-6}\ ℃^{-1}$。当温度升高 30 ℃时，试求两杆横截面上的最大应力。

1-24 低碳钢拉伸试验的应力-应变曲线（图 1-15），大致可以分为哪四个阶段？下列哪种说法正确？



题 1-22 图



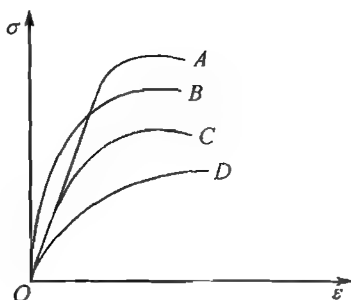
题 1-23 图

A. 弹性变形阶段,塑性变形阶段,屈服阶段,断裂阶段

B. 弹性变形阶段,塑性变形阶段,强化阶段,颈缩阶段

C. 弹性变形阶段,屈服阶段,强化阶段,颈缩阶段

1-25 在图示的四种材料的应力-应变曲线中,哪种材料强度最大?哪种材料塑性最好?



题 1-25 图

1-26 在研究材料的力学性能时,出现过 $\sigma_{0.2}$,试说明下列哪些说法是正确的?

A. 对于没有明显屈服阶段的塑性材料,通常用 $\sigma_{0.2}$ 作为材料的屈服强度

B. 对于没有屈服阶段的脆性材料,通常用 $\sigma_{0.2}$ 作为材料的屈服强度

C. $\sigma_{0.2}$ 是试件在加载过程中塑性应变为 0.2% 时的应力值

1-27 对于脆性材料,下列说法哪些是正确的?

A. 试件在受拉过程中,不出现屈服和颈缩现象

B. 压缩强度极限比拉伸强度极限高出许多

C. 抗冲击性能好

第二章 剪　切

§2-1 工程实际中的剪切问题

在工程实际中，常遇到剪切问题。在剪切机上剪断钢坯或钢板(图2-1)就是一例；而常用的销(图2-2)、螺栓(图2-3)、平键(图2-4)等连接件都是主要发生剪切变形的构件，称为剪切构件。

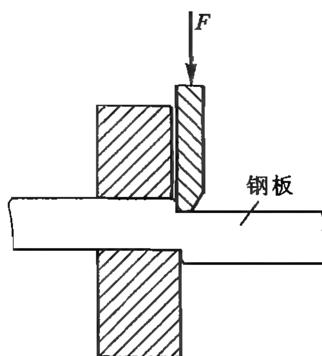


图2-1

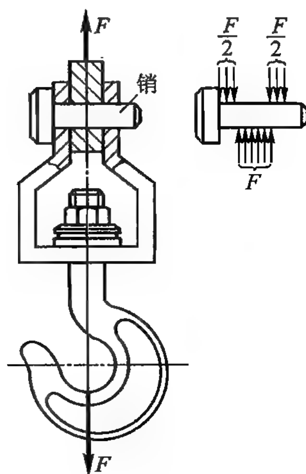


图2-2

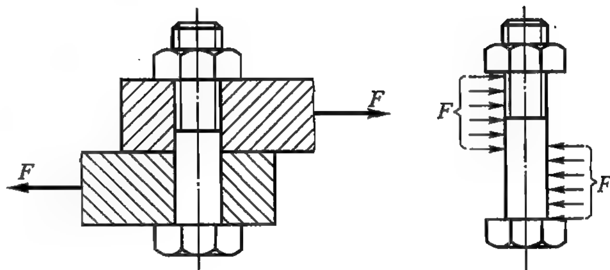


图2-3

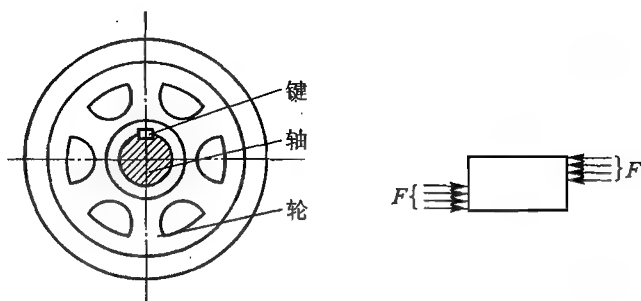


图 2－4

这类构件的受力和变形情况可概括为如图 2－5 所示的简图，其受力特点是：作用在构件两侧面上的横向外力的合力大小相等，方向相反，作用线相距很近。在这样的外力作用下，其变形特点是：两力间的横截面发生相对错动，这种变形形式叫做剪切。

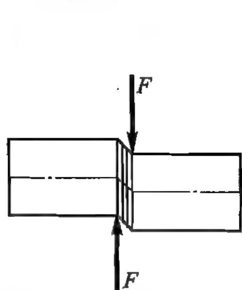


图 2－5

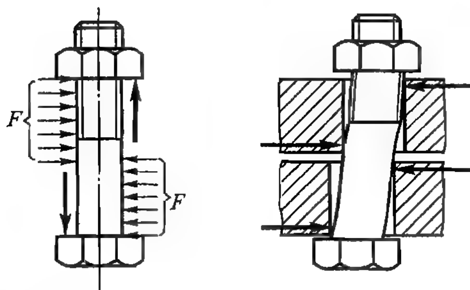


图 2－6

剪切构件在剪切变形的同时常伴随着其他形式的变形。例如，图 2－3 所示螺栓上的两个外力 F 并不沿同一条直线作用，它们形成一个力偶，要保持螺栓的平衡，必然还有其他的外力作用，如图 2－6 所示。这样就出现了拉伸、弯曲等其他形式的变形。但是，这些附加的变形一般都不是影响这些剪切构件强度的主要因素，可以不加考虑。

§2－2 剪切的实用计算

对于剪切构件的强度，要作精确的分析是比较困难的，因为应力的实际分布情况比较复杂，所以在实际应用中，根据实践经验作了一些假设，采用简化的计算方法，称为剪切的实用计算。下面以螺栓连接件的强度计算为例，来说明这种方法。

1. 剪切强度

设两块钢板用螺栓连接，如图 2－7a 所示，当两钢板受拉时，螺栓的受力情况如图 2－7b 所示。若螺栓上作用的力 F 过大，螺栓可能沿着两力间的截面 $m-m$ 被剪断，这个截面叫做剪切面。现在用截面法来研究螺栓在剪切面上的内力。用一个截面假想地将螺栓沿剪切面 $m-m$ 截开，分为上下两部分，如图 2－7c所示。无论取上半部分或下半部分为研究对象，为了保持平衡，在剪切面内必然有与外力 F 大小相等，方向相反的内力存在，这个内力叫做剪力，用 F_S 表示，它是剪切面上分布内力的总和。

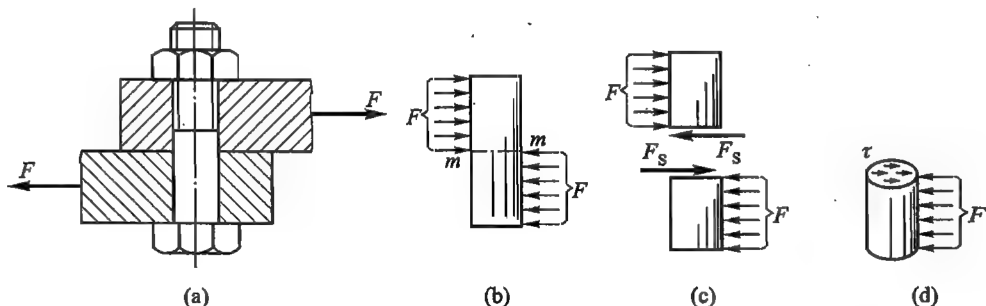


图 2－7

在轴向拉伸和压缩一章中，曾用正应力 σ 表示单位面积上垂直于截面的内力；同样，对于剪切构件，也可以用单位面积上平行于截面的内力来衡量内力的聚集程度，称为切应力，用符号 τ 表示，如图 2－7d 所示，其单位与正应力一样，在我国法定计量单位中是 Pa（帕）。

在剪切面上，切应力的实际分布情况比较复杂。为了计算上的方便，在剪切实用计算中，假设切应力 τ 均匀地分布在剪切面上。按此假设算出的平均切应力称为名义切应力，一般就简称为切应力。所以剪切构件横截面上的切应力可按下式计算：

$$\tau=\frac{F_S}{A} \tag{2-1}$$

式中：F_S——剪切面上的剪力；

A——剪切面面积。

为了保证螺栓安全可靠地工作，要求其工作时的切应力不得超过某一个许用值。因此螺栓的剪切强度条件为：

$$\tau=\frac{F_S}{A}\leqslant[\tau] \tag{2-2}$$

式中：$[\tau]$——材料的许用切应力。

剪切强度条件式(2-2)虽然是结合螺栓的情况得出的,但也可适用于其他类似的剪切构件。

在剪切强度条件中所采用的许用切应力,是在与构件的实际受力情况相似的条件下进行试验,并同样按切应力均匀分布的假设计算出来的。考虑到制造工艺和实际工作条件等因素,在设计规范中,对一些剪切构件的许用切应力值作了规定。根据试验,一般情况下,材料的许用切应力$[\tau]$与许用拉应力$[\sigma]$之间有以下的关系:

对塑性材料 $[\tau]=(0.6\sim0.8)[\sigma]$

对脆性材料 $[\tau]=(0.8\sim1.0)[\sigma]$

利用这一关系,可根据许用拉应力来估计许用切应力之值。

由上所述,实用计算是一种带有经验性的强度计算。这种计算虽然比较粗略,但由于许用切应力的测定条件与实际构件的情况相似,而且其计算也与名义切应力的计算方法相同,所以它基本上是符合实际情况的,在工程实际中得到广泛的应用。

2. 挤压强度

在外力作用下,剪切构件除可能被剪断外,还可能发生挤压破坏。挤压破坏的特点是:构件互相接触的表面上,因承受了较大的压力作用,使接触处的局部区域发生显著的塑性变形或被压碎。这种作用在接触面上的压力称为挤压力;在接触处产生的变形称为挤压变形。图2-8所示为钉孔的挤压破坏现象,钉孔受压的一侧被压溃,材料向两侧隆起,钉孔已不再是圆形。挤压破坏会导致连接松动,影响构件的正常工作。因此对剪切构件还需进行挤压强度计算。

挤压力的作用面叫做挤压面,由于挤压力而引起的应力叫做挤压应力,以σ_{bs}表示。在挤压面上,挤压应力的分布情况也比较复杂,在实用计算中假设挤压应力均匀地分布在挤压面上。因此挤压应力可按下式计算:

$$\sigma_{bs}=\frac{F}{A_{bs}} \qquad (2-3)$$

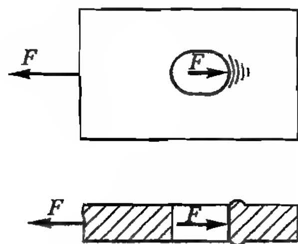


图2-8

式中:F——挤压面上的挤压力;

A_{bs}——挤压面面积。

对于螺栓、销等连接件,挤压面为半圆柱面(图2-9a),根据理论分析,在半圆柱挤压面上挤压应力的分布情况如图2-9b所示,最大挤压应力在半圆弧的中点处。如果用挤压面的正投影作为计算面积,如图2-9c中的直径平面$ABCD$,以其除挤压力F而得的计算结果,与按理论分析所得的最大挤压应力值相近。因此在实用计算中一般都采用这个计算方法。

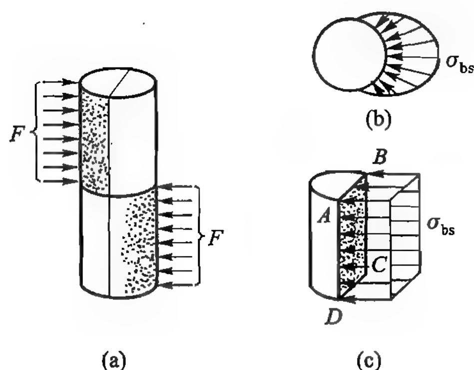


图 2-9

为了保证构件的正常工作，应要求构件工作时所引起的挤压应力不得超过某一个许用值，因此挤压强度条件为：

$$\sigma_{bs}=\frac{F}{A_{bs}}\leqslant[\sigma_{bs}] \qquad (2-4)$$

式中的$[\sigma_{bs}]$为材料的许用挤压应力，其值可由有关设计规范中查得。根据试验，许用挤压应力$[\sigma_{bs}]$与许用拉应力$[\sigma]$有以下的关系：

塑性材料　　　　$[\sigma_{bs}]=(1.5\sim2.5)[\sigma]$

脆性材料　　　　$[\sigma_{bs}]=(0.9\sim1.5)[\sigma]$

式(2-4)所表示的挤压强度条件，也可适用于其他类似的剪切构件。

如果两个接触构件的材料不同，应以连接中抵抗挤压能力较弱的构件来进行挤压强度计算。

例 2-1　2.5 m^3 挖掘机减速器的一轴上装一齿轮，齿轮与轴通过平键连接，已知键所受的力为 $F=12.1$ kN。平键的尺寸为：$b=28$ mm，$h=16$ mm，$l_2=70$ mm，圆头半径 $R=14$ mm（图 2-10）。键的许用切应力$[\tau]=87$ MPa，轮毂的许用挤压应力取$[\sigma_{bs}]=100$ MPa，试校核键连接的强度。

解：

(1) 校核剪切强度　键的受力情况如图 2-10c 所示，此时剪切面上的剪力（图 2-10d）为

$$F_S=F=12.1\ \text{kN}=12\ 100\ \text{N}$$

对于圆头平键，其圆头部分略去不计（图 2-10e），故剪切面面积为

$$\begin{aligned}A&=bl_p=b(l_2-2R)\\&=28\ \text{mm}\times(70\ \text{mm}-2\times14\ \text{mm})\\&=11.76\times10^{-4}\ \text{m}^2\end{aligned}$$

所以，平键的工作切应力为

$$\tau=\frac{F_S}{A}=\frac{12\ 100\ \text{N}}{11.76\times10^{-4}\ \text{m}^2}$$

$$= 10.3 \times 10^6 \text{ Pa} = 10.3 \text{ MPa} < [\tau] = 87 \text{ MPa}$$

满足剪切强度条件。

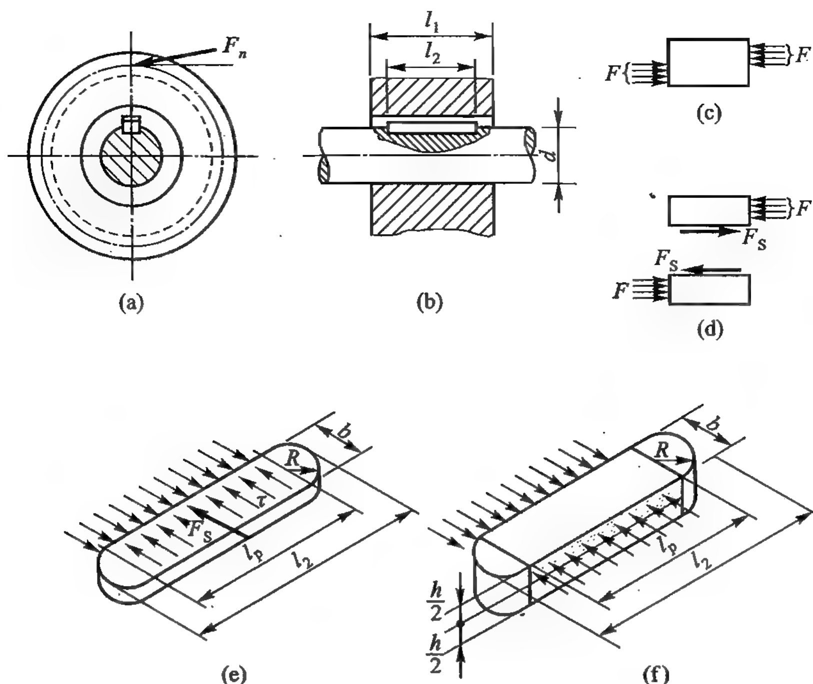


图 2-10

(2)校核挤压强度　与轴和键比较,通常轮毂抵抗挤压的能力较弱。轮毂挤压面上的挤压力为

$$F = 12\ 100 \text{ N}$$

挤压面的面积与键的挤压面相同,设键与轮毂的接触高度为$\frac{h}{2}$,则挤压面面积(图 2-10f)为

$$A_{bs} = \frac{h}{2} \cdot l_p = \frac{16}{2} \text{ mm} \times (70 \text{ mm} - 2 \times 14 \text{ mm})$$
$$= 3.36 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

故轮毂的工作挤压应力为

$$\sigma_{bs} = \frac{F}{A_{bs}} = \frac{12\ 100 \text{ N}}{3.36 \times 10^{-4} \text{ m}^2}$$
$$= 36 \times 10^6 \text{ Pa} = 36 \text{ MPa} < [\sigma_{bs}] = 100 \text{ MPa}$$

也满足挤压强度条件。所以,这一键连接的剪切强度和挤压强度都是足够的。

例 2-2　高炉热风围管套环与吊杆通过销轴连接,如图 2-11a 所示。每个吊杆上承担的重量 $F = 188$ kN,销轴直径 $d = 90$ mm,在连接处吊杆端部厚 $\delta_1 = 110$ mm,套环厚 $\delta_2 = 75$ mm,吊杆、套环和销轴的材料均为 Q235 钢,许用应力$[\tau] = 90$ MPa,$[\sigma_{bs}] = 200$ MPa,试校核销轴连接的强度。

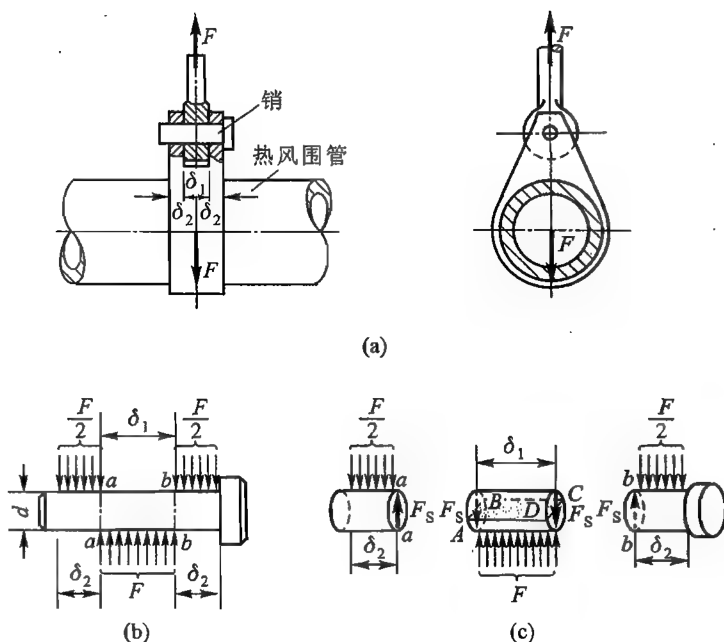


图 2－11

解：

（1）校核剪切强度　销轴的受力图如图 2－11b 所示，$a-a$ 和 $b-b$ 两截面皆为剪切面，这种情况称为双剪。利用截面法以假想的截面沿 $a-a$ 和 $b-b$ 将销轴截开（图 2－11c），由所取研究对象的平衡条件可知，销轴剪切面上的剪力为

$$F_S=\frac{F}{2}=\frac{188}{2}\ \text{kN}=94\ \ \text{kN}$$

剪切面面积为

$$A=\frac{\pi d^2}{4}=\frac{\pi(90\ \text{mm})^2}{4}=63.6\times10^{-4}\ \text{m}^2$$

销轴的工作切应力为

$$\tau=\frac{F_S}{A}=\frac{94\times1\ 000\ \text{N}}{63.6\times10^{-4}\ \text{m}^2}=14.8\times10^6\ \ \text{Pa}$$

$$=14.8\ \ \text{MPa}<[\tau]=90\ \ \text{MPa}$$

符合强度条件，所以销轴的剪切强度是足够的。

（2）校核挤压强度　销轴的挤压面是圆柱面，用通过圆柱直径的平面面积作为挤压面的计算面积。

又因长度为 δ_1 的一段销轴所承受的挤压力与两段长度为 δ_2 的销轴所承受的挤压力相同，而前者的挤压面计算面积较后者小，所以应以前者来校核挤压强度。这时，挤压面（图 2－11c上的 $ABCD$）上的挤压力为

$$F=188\ \ \text{kN}$$

挤压面的计算面积为

$$A_{bs}=\delta_1 d=110\times 90\ \text{mm}^2=9\ 900\ \text{mm}^2=99\times 10^{-4}\ \text{m}^2$$

所以工作挤压应力为

$$\sigma_{bs}=\frac{F}{A_{bs}}=\frac{188\times 1\ 000\ \text{N}}{99\times 10^{-4}\ \text{m}^2}=19\times 10^{6}\ \text{Pa}$$
$$=19\ \text{MPa}<[\sigma_{bs}]=200\ \text{MPa}$$

故挤压强度也是足够的。

以上所述，皆为保证剪切构件强度的问题。但有时在工程实际中，也会遇到与上述问题相反的情况，就是剪切破坏的利用。例如，车床传动轴上的保险销（图 2－12a），当载荷增加到某一数值时，保险销即被剪断，从而保护车床的重要部件。又如冲床冲模时使工件发生剪切破坏而得到所需要的形状（图 2－12b），也是利用剪切破坏的实例。对这类问题所要求的破坏条件为：

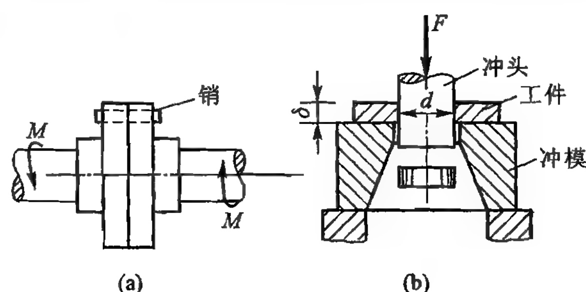


图 2－12

$$\tau=\frac{F_S}{A}\geqslant\tau_b \tag{2-5}$$

式中的 τ_b 为剪切强度极限。表 2－1 为常用金属材料剪切强度极限 τ_b 的数值。

表 2－1　常用金属材料的剪切强度极限 τ_b

金属名称	软质（退火的）/MPa	硬质（冷作硬化的）/MPa
铝	70～110	130～160
硬　　铝	220	380
紫　　铜	180～220	250～300
黄　　铜	220～300	350～400
钢（含碳 0.2%）	320	400
钢（含碳 0.3%）	360	480
钢（含碳 0.4%）	450	560

金属名称	软质(退火的)/MPa	硬质(冷作硬化的)/MPa
钢(含碳0.6%)	560	720
不锈钢	520	560

对塑性材料,剪切强度极限 τ_b 与抗拉强度 σ_b 之间,有如下的关系:

$$\tau_b=(0.6\sim0.8)\sigma_b$$

也可根据这一关系来计算 τ_b。

例2-3 如图2-12b所示,若钢板的厚度 $\delta=5$ mm,钢板的剪切强度极限 $\tau_b=320$ MPa,试计算至少需要多大的冲力 F 才能在钢板上冲出直径 $d=15$ mm的圆孔。

解:冲孔的过程就是发生剪切破坏的过程,故可由式(2-5)求出所需的冲力。

剪切面面积是直径为 d、高为 δ 的圆柱面面积,即:

$$A=\pi\cdot d\cdot\delta=3.14\times15\times5\ \text{mm}^2=236\ \text{mm}^2=2.36\times10^{-4}\ \text{m}^2$$

分布于此圆柱面上的剪力为

$$F_S=F$$

冲孔时,工作切应力至少达到剪切强度极限 τ_b。故由式(2-5)可得

$$F\geqslant\tau_b\cdot A=320\times10^6\times2.36\times10^{-4}\ \text{kN}=75.52\ \text{kN}$$

所以冲力 F 至少需要75.52 kN。



小结

构件在受剪切时,常伴随有挤压现象。解决这类问题的关键是正确地确定剪切面与挤压面。剪切面是构件将要发生相对错动的面,挤压面是相互接触压紧的面。

1. 剪切实用计算所作的主要假设是:

(1) 假设剪切面上的切应力均匀分布,由此得出剪切强度条件为

$$\tau=\frac{F_S}{A}\leqslant[\tau]$$

(2) 假设挤压面上的挤压应力均匀分布,由此得出挤压强度条件为

$$\sigma_{bs}=\frac{F}{A_{bs}}\leqslant[\sigma_{bs}]$$

强度条件中的许用应力也是在相似条件下进行试验,同样按应力均匀分布的假设计算出来的。实践表明,上述的实用计算方法,在工程实际中是切实可行的。

2. 剪切构件的强度计算,与轴向拉压时相同,也是按外力分析、内力分析、强度计算等几个步骤进行的。在作外力和内力分析时,还需注意以下几点:

(1) 首先必须取出剪切构件，明确研究对象，绘出其上的全部外力，确定外力大小。在此基础上才能正确地辨明剪切面和挤压面。

(2) 正确地确定剪切面的位置及其上的剪力。剪切面在两相邻外力作用线之间，与外力平行。

(3) 正确地确定挤压面的位置及其上的挤压力。挤压面即为外力的作用面，与外力垂直；挤压面为半圆弧面时，可将构件的直径截面视为挤压面。

做到以上几点，剪切构件的强度计算也就不难解决了。

3. 题目类型

(1) 强度计算　剪切强度计算，挤压强度计算（如例 2-1、例 2-2）。

(2) 利用剪切破坏　利用剪切破坏，保护主要构件。或直接利用剪切破坏——冲孔等（如例 2-3）。



思考题

2-1　切应力 τ 与正应力 σ 有何区别？

2-2　指出图 2-13 中构件的剪切面和挤压面。

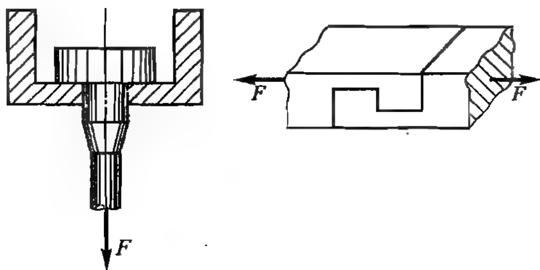


图 2-13

2-3　挤压面与计算挤压面是否相同？试举例说明。

2-4　如图 2-14 所示，铜板与钢柱均受压力作用，试指出何处应考虑压缩强度？何处应考虑挤压强度？应对哪个构件进行挤压强度计算？为什么？

2-5　在材料力学中，为什么说连接件的计算是一种“实用计算”？其中引入了哪些假设？这些假设的根据是什么？

2-6　在工程设计中，对于铆钉、销钉等圆柱形连接件的挤压强度问题，可以采用“直径截面”，而不是用直接受挤压的半圆柱面来计算挤压应力，为什么？

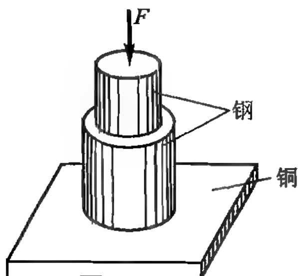


图 2-14

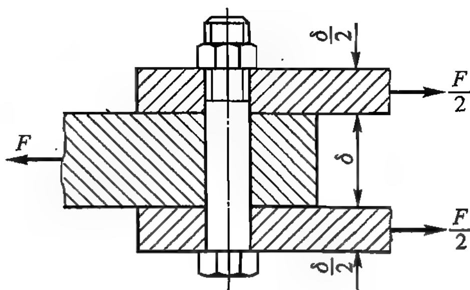
2-7 挤压与压缩有什么区别？为什么挤压许用应力大于压缩许用应力？

2-8 连接件上的剪切面、挤压面与外力方向有什么关系？

2-9 构件连接部位应满足哪几方面的强度条件？如何分析连接件的强度？

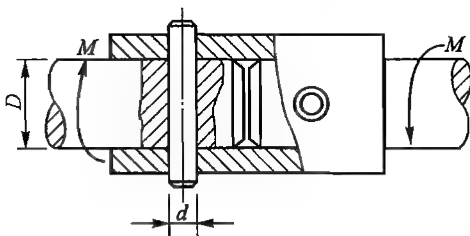
习 题

2-1 一螺栓连接如图所示，已知 $F=200\ \text{kN}$，$\delta=20\ \text{mm}$，螺栓材料的许用切应力 $[\tau]=80\ \text{MPa}$，试求螺栓的直径。



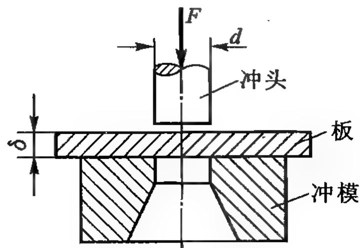
题 2-1 图

2-2 销钉式安全离合器如图所示，允许传递的外力偶矩 $M=0.3\ \text{kN}\cdot\text{m}$，销钉材料的剪切强度极限 $\tau_b=360\ \text{MPa}$，轴的直径 $D=30\ \text{mm}$，为保证 $M>300\ \text{N}\cdot\text{m}$ 时销钉被剪断，试求销钉的直径 d。



题 2-2 图

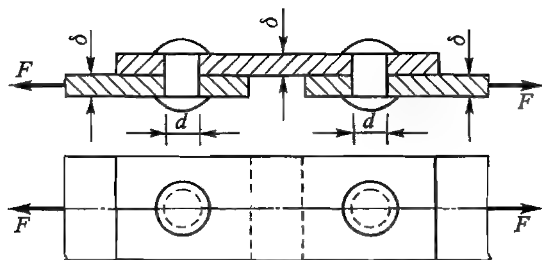
2-3 冲床的最大冲力为 400 kN，冲头材料的许用应力 $[\sigma]=440\ \text{MPa}$，被冲剪钢板的剪切强度极限 $\tau_b=360\ \text{MPa}$。试求在最大冲力作用下所能冲剪圆孔的最小直径 d 和钢板的最大厚度 δ。



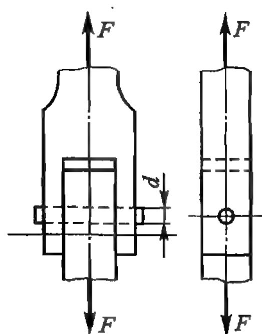
题 2-3 图

2-4 已知图示铆接钢板的厚度 $\delta=10\ \text{mm}$，铆钉的直径为 $d=17\ \text{mm}$，铆钉的许用切应力 $[\tau]=140\ \text{MPa}$，许用挤压应力 $[\sigma_{bs}]=320\ \text{MPa}$，$F=24\ \text{kN}$，试作强度校核。

2-5 图示为测定剪切强度极限的试验装置。若已知低碳钢试件的直径 $d = 10$ mm，剪断试件时的外力 $F = 50.2$ kN，试问材料的剪切强度极限为多少？

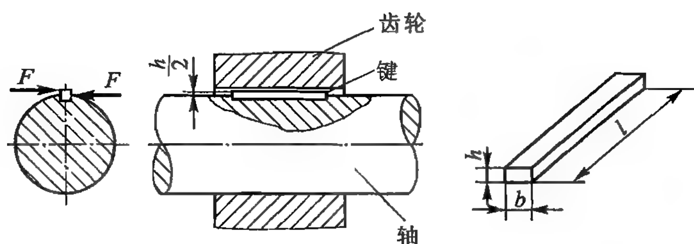


题 2-4 图



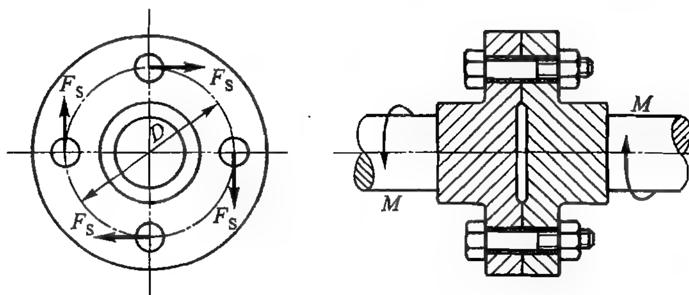
题 2-5 图

2-6 一减速机上齿轮与轴通过平键连接。已知键受外力 $F = 12$ kN，所用平键的尺寸为 $b = 28$ mm，$h = 16$ mm，$l = 60$ mm，键的许用应力 $[\tau] = 87$ MPa，$[\sigma_{bs}] = 100$ MPa。试校核键的强度。



题 2-6 图

2-7 图示联轴器，用四个螺栓连接，螺栓对称地安排在直径 $D = 480$ mm 的圆周上。这

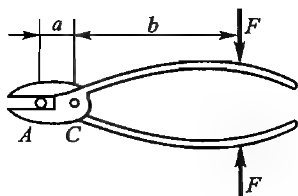


题 2-7 图

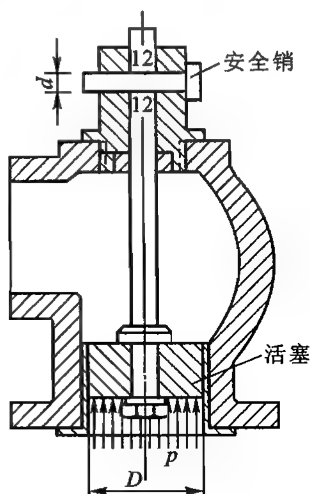
个联轴节传递的力偶矩 $M=24\ \mathrm{kN\cdot m}$，求螺栓的直径 d 需要多大？材料的许用切应力 $[\tau]=80\ \mathrm{MPa}$。

（提示：由于对称，可假设各螺栓所受的剪力相等）

2-8 图示夹剪，销子 C 的直径为 6 mm，剪直径与销子直径相同的铜丝时，若力 $F=200\ \mathrm{N}$，$a=30\ \mathrm{mm}$，$b=150\ \mathrm{mm}$，求铜丝与销子横截面上的平均切应力。



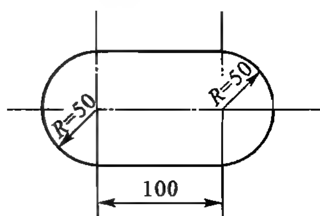
题 2-8 图



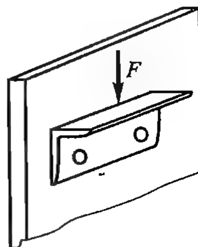
题 2-9 图

2-9 一冶炼厂使用的高压泵安全阀如图所示。要求当活塞下高压液体的压强达 $p=3.4\ \mathrm{MPa}$ 时，使安全销沿 1-1 和 2-2 两截面剪断，从而使高压液体流出，以保证泵的安全。已知活塞直径 $D=52\ \mathrm{mm}$，安全销采用 15 钢，其剪切强度极限 $\tau_b=320\ \mathrm{MPa}$，试确定安全销的直径 d。

2-10 在厚度 $\delta=5\ \mathrm{mm}$ 的钢板上，冲出一个形状如图所示的孔，钢板剪断时的剪切强度极限 $\tau_b=300\ \mathrm{MPa}$，试求冲床所需的冲力 F。



题 2-10 图



题 2-11 图

2-11 用两个铆钉将 140 mm×140 mm×12 mm 的等边角钢铆接在立柱上，构成支托。若 $F=30\ \mathrm{kN}$，铆钉的直径为 21 mm，试求铆钉的切应力和挤压应力。

第三章　扭　转

§3－1　工程实际中的扭转问题

扭转是杆的又一种基本变形形式。在工程实际中，尤其是在机械中的许多构件，其主要变形是扭转。例如，攻丝时（图 3－1），要在手柄两端加上大小相等、方向相反的力；这两个力在垂直于丝锥轴线的平面内构成一个矩为 M 的力偶，使丝锥转动。下面丝扣的阻力则形成转向相反的力偶，阻碍丝锥的转动。丝锥在这一对力偶的作用下将产生扭转变形。又如，桥式起重机的传动轴（图 3－2a），它的两端分别以联轴器与减速器的出轴和车轮的轮轴相接，将减速器输出的动力传至车轮，驱动起重机行驶。其受力情况如图 3－2b 所示。当减速器出轴转动时，轴一端联轴器上受到几个切向外力的作用，这些外力构成了一个在垂直于轴线平面内的力偶。同样，在轴的另一端，车轮的轮轴通过联轴器给传动轴的反作用，也构成这样一个力偶，这两个力

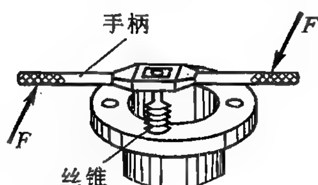


图 3－1

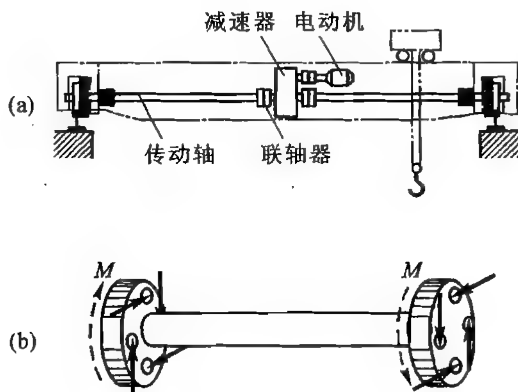


图 3－2

偶的大小相等、转向相反。在这一对力偶的作用下，传动轴产生扭转。

扭转构件上外力的作用方式很多，如电动机转子上的磁力、胶带轮上的胶带张力、齿轮上的切向力等，虽然它们的具体作用方式不同，但总可以将其一部分作用简化为一个在垂直于轴线平面内的力偶。所以，扭转构件的受力特点是，构件两端受到两个在垂直于轴线平面内的力偶作用，两力偶大小相等，转向相反。其简图可表示为如图3－3所示的情况。在这样一对力偶作用下，其变形特点是：各横截面绕轴线发生相对转动，这时任意两横截面间有相对的角位移，这种角位移称为扭转角。图3－3中的 ϕ_{AB} 就是截面 B 相对于截面 A 的转角。

在工程实际中，还有不少构件，如电动机的主轴、钻机的钻杆、鼓风机的主轴等，它们的主要变形是扭转，但同时还可能伴随有弯曲、拉压等变形，不过后者影响不大时，往往可以忽略，或者在初步设计中，暂不考虑这些因素，将其视为扭转构件。本章主要讨论圆轴的扭转问题。

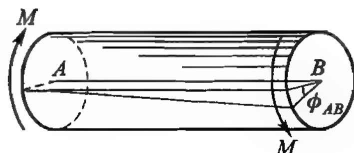


图3－3

§3－2 扭转时的内力

与拉压、剪切等问题一样，研究扭转构件的强度和刚度问题时，首先必须计算出构件上的外力，分析截面上的内力。

1. 外力偶矩的计算

前面已经提到，扭转时，作用在轴上的外力是一对大小相等、转向相反的力偶。但是，在工程实际中，常常是并不直接给出外力偶矩的大小，而是知道轴所传递的功率和轴的转速。功率、转速和力偶矩之间有一定的关系，利用它们之间的关系，可以求出作用在轴上的外力偶矩。它们之间的关系是

$$\{M\}_{N\cdot m}=9\,550\frac{\{P\}_{kW}}{\{n\}_{r/min}} \qquad (3-1)$$

式中：M——作用在轴上的外力偶矩，单位为 N·m；

P——轴传递的功率，单位为 kW；

n——轴的转速，单位为 r/min。

在我国法定计量单位中，功率的单位是 W（瓦）1 W＝1 N·m/s。

从式(3－1)可以看出，轴所承受的力偶矩与传递的功率成正比，与轴的转速成反比。因此，在传递同样的功率时，低速轴所受的力偶矩比高速轴大。所以在一个传动系统中，低速轴的直径要比高速轴的直径粗一些。

2. 扭矩

现在讨论扭转时轴横截面上的内力。设一轴在一对大小相等、转向相反的外力偶作用下产生扭转变形，如图 3－4a 所示。为了揭示轴的内力，仍用截面法，以一个假想的截面在轴的任意处 $n-n$ 垂直地将轴截开，取左段为研究对象，如图 3－4b 所示。由于 A 端作用一个矩为 M_A 的力偶，为了保持平衡，在截面的平面内，必然存在一个内力偶矩与它平衡。由平衡方程 $\sum M_x=0$，即可求得这个内力偶矩的大小

$$T=M_A$$

由此可见，杆扭转时，其横截面上的内力，是一个在截面平面内的力偶，其力偶矩称为扭矩。

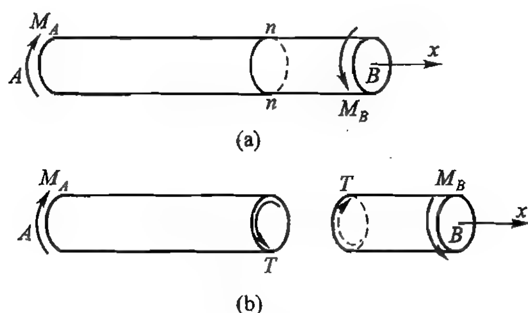


图 3－4

如取轴的右段为研究对象（图 3－4b），也可得到同样的结果。取截面左边部分与取截面右边部分为研究对象所求得的扭矩，应数值相等而转向相反，因为它们是作用与反作用的关系。为了使从两段杆上求得的同一截面上的扭矩的正负号相同，可将扭矩的正负号作如下的规定：采用右手螺旋法则，如果以右手四指表示扭矩的转向，则拇指的指向离开截面时的扭矩为正，如图 3－5a 所示；反

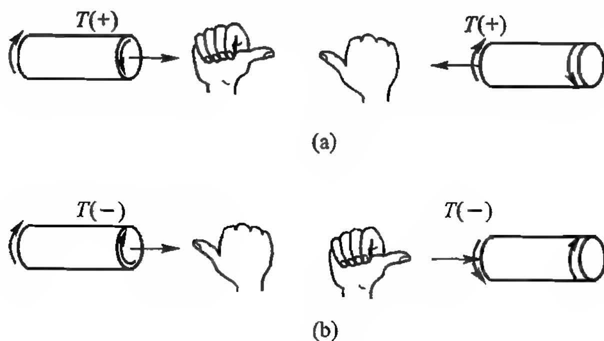


图 3－5

之，拇指指向截面时则扭矩为负，如图 3－5b 所示。由图中轴的变形情况可以看到，无论扭矩为正或为负，截面左右两段轴扭转变形的转向是一致的。所以扭矩正负号的规定，实际上也是根据轴的变形而来的。

当轴上同时有几个外力偶作用时，杆各截面上的扭矩须分段求出。为了确定最大扭矩的所在位置，以便找出危险截面，在工程实际中常用一个图形来表示沿轴线各横截面上的扭矩随横截面位置的变化规律，这种图形称为**扭矩图**。其方法是：取一直角坐标系，令横坐标平行于轴的轴线，表示横截面的位置，纵坐标表示扭矩的代数值，然后将各横截面的扭矩按代数值标注于坐标上，即得此轴的扭矩图。如图 3－6a 所示的轴，用截面法可求得 AB、BC 两段的扭矩值分别为：

$$T_1 = M_A = 3\ 000\ \text{N} \cdot \text{m}$$

$$T_2 = M_A - M_B = 3\ 000\ \text{N} \cdot \text{m} - 1\ 800\ \text{N} \cdot \text{m} = 1\ 200\ \text{N} \cdot \text{m}$$

按正负号规定，两者皆为正值（图 3－6b、c）。将结果画在坐标上，即得如图 3－6d所示的扭矩图。由图可见，最大扭矩在 AB 段的各截面上。

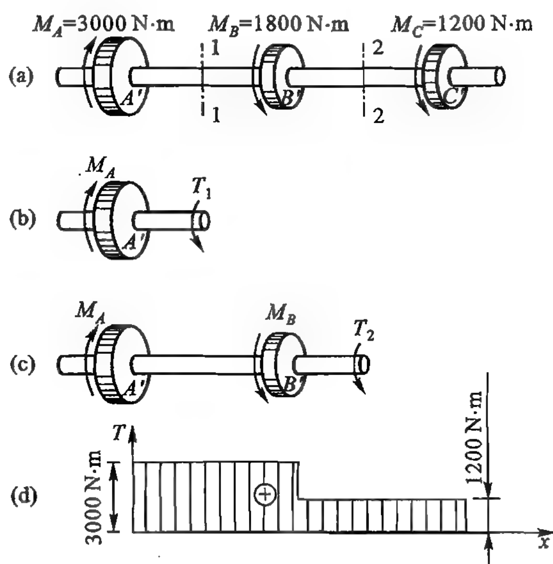


图 3－6

例 3－1　图 3－7 所示为一装岩机的后车轴，已知其行走功率 $P = 10.5$ kW，额定转速 $n = 680$ r/min，机体上的载荷通过轴承传到车轴上，轴承与车轴间的摩擦可略去不计。试画出车轴的扭矩图。

解：

（1）计算外力偶矩　取车轴为研究对象，其受力情况如图 3－7b 所示。齿轮 B 所输入的

功率分别传递到 A、C 两车轮上，每个车轮所消耗的功率皆为 $P_{轮}=\frac{P}{2}=\frac{10.5}{2}\ \text{kW}=5.25\ \text{kW}$。则由式(3-1)，齿轮所受的外力偶矩为

$$M_B=9\ 550\frac{P}{n}=\left(9\ 550\times\frac{10.5}{680}\right)\ \text{N}\cdot\text{m}$$
$$=148\ \text{N}\cdot\text{m}$$

两车轮所受的外力偶矩为

$$M_A=M_C=9\ 550\frac{P_{轮}}{n}=\left(9\ 550\times\frac{5.25}{680}\right)\ \text{N}\cdot\text{m}$$
$$=74\ \text{N}\cdot\text{m}$$

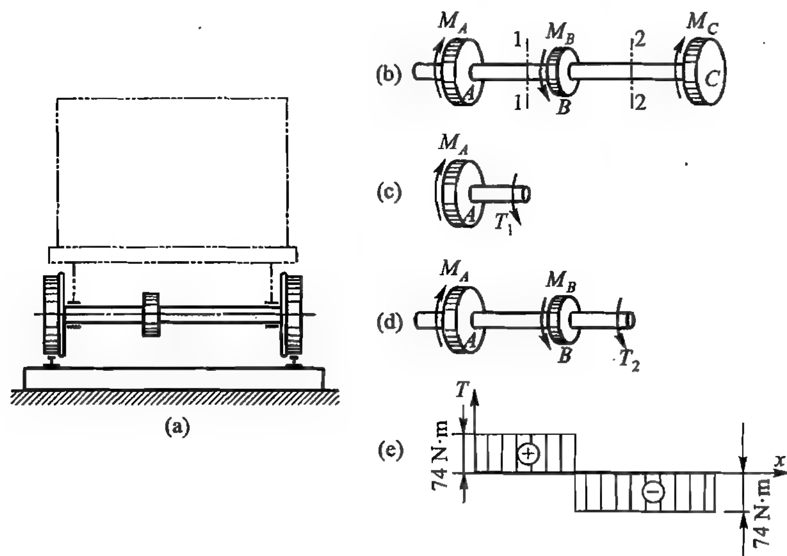


图 3-7

(2)计算扭矩　求 AB 段的扭矩时，可在 AB 段内用截面 1-1 将轴截开，以 T_1 表示截面上的扭矩，设其转向为正，取左段为研究对象(图 3-7c)，由平衡方程

$$\sum M_x=0,\quad T_1-M_A=0$$

可得

$$T_1=M_A=74\ \text{N}\cdot\text{m}$$

同理，在 BC 段内用截面 2-2 将轴截开，以 T_2 表示截面上的扭矩，仍然取左段为研究对象(图 3-7d)，由平衡方程

$$\sum M_x=0,\quad T_2+M_B-M_A=0$$

得

$$T_2=M_A-M_B=75\ \text{N}\cdot\text{m}-150\ \text{N}\cdot\text{m}=-75\ \text{N}\cdot\text{m}$$

T_2 为负值，说明它的转向与原设方向相反，按扭矩的正负号规定，此段轴各横截面上的扭矩应为负值。

(3) 画扭矩图　作平行于轴线的横坐标轴，表示横截面的位置，并用纵坐标表示扭矩，根据求得的数值和扭矩的正负号，即可画出车轴的扭矩图，如图 3－7e 所示。

画扭矩图，也是采用截面法确定任一截面上的内力，扭矩的正负号，采用右手螺旋法则。

同一截面左右两侧的扭矩大小相等，方向相反，互为作用与反作用关系。

在集中力偶作用面，扭矩发生突变，其突变值等于集中力偶值的大小。

选取研究对象时，一般选取外力偶较少的一段为研究对象。

§3－3 薄壁圆筒的扭转

在前面剪切一章中，关于剪切时应力与应变之间的关系，我们还没有讨论。因为螺栓、键等连接件不仅在剪切面上的切应力分布复杂，而且在剪切变形的同时，还伴随有其他形式的变形，因此剪切面上除有切应力外，还有数值不大的正应力，即构件还不是处于纯剪切的状态。为了实现纯剪切，得到剪切时应力与应变之间的关系，下面对薄壁圆筒的扭转进行一些分析。

1. 薄壁圆筒扭转时的应力

取一薄壁圆筒，在其表面上画出圆周线和纵向平行线（图 3－8a），在圆筒两端垂直于圆筒轴线的平面内施加一对转向相反而其矩均为 M 的力偶，使其产生扭转变形，如图 3－8b 所示。当变形不大时，可以看到以下现象：

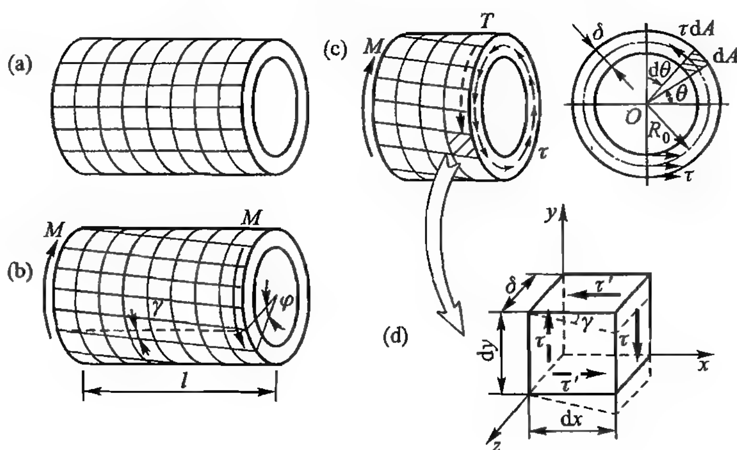


图 3－8

① 圆周线的形状和大小不变，两相邻圆周线绕轴线发生相对转动，它们之间的距离不变。

② 各纵向平行线仍然平行，但都倾斜了一个角度，由纵向线与圆周线所组成的矩形变成菱形。

根据圆周线之间距离不变的试验现象，且圆筒上并无轴向外力，这说明圆筒扭转时没有轴向拉伸或压缩变形，因而可以判断，各横截面上没有正应力。如以一横截面将圆筒假想地截开，则该截面上必然有一个与外力偶矩平衡的扭矩 T，由于只有内力元素 τdA 才能构成扭矩，因而可以推断，圆筒横截面上必然有切于圆周方向的切应力 τ 存在。而且，根据圆筒扭转后，各纵线都倾斜了同一个角度 γ 这一现象，说明沿圆周上各点，横截面上的切应力相同；又因圆筒壁厚 δ 很小，可以认为切应力沿壁厚方向均匀分布（图 3－8c）。

如果以横截面和纵向截面自筒壁上取出一个微小的正六面体，称为单元体，如图 3－8d 所示，那么在这个单元体上将只有切应力而无正应力作用，这种受力情况称为纯剪切。

2. 切应力互等定理

在图 3－8d 所示的单元体上，由于圆筒横截面上有切应力作用，故在垂直于 x 轴的两个平面上有切应力 τ，它们组成一个顺时针转向的力偶，其力偶矩为 $(\tau\delta dy)\cdot dx$，这个力偶将使单元体发生顺时针方向的转动。但是，实际上单元体仍处于平衡状态，所以在单元体垂直于 y 轴的两个平面上，必然有切应力 τ' 存在，并由它们组成另一个逆时针转向的力偶，其力偶矩为 $(\tau'\delta dx)\cdot dy$，以保持单元体的平衡。由平衡方程 $\sum M_z=0$，可得

$$(\tau'\delta dx)\cdot dy-(\tau\delta dy)\cdot dx=0 \tag{3-2}$$

所以

$$\tau=\tau' \tag{3-3}$$

如果规定切应力的正负号使单元体产生顺时针方向转动趋势时的切应力为正，使单元体产生逆时针方向转动趋势时的切应力为负（图 3－9），那么可以将式（3－3）叙述为：两互相垂直截面上在其相交处的切应力成对存在，且数值相等而符号相反。这个规律称为切应力互等定理。这一定理具有普遍意义，在非纯剪切的情况下也同样适用。

3. 剪切胡克定律

由薄壁圆筒扭转的试验中可以看出，在切应力的作用下，单元体的直角将发生微小的改变，如图 3－8d 所示，这个直角的改变量 γ 称为切应变，用弧度来度量。在薄壁圆筒的扭转试验中，根据所加的外力偶矩可以计算出切应力 τ；测出圆筒两端面的相对转角 ϕ 后，可以算出相应的切应变 γ。试验表明，正如拉压胡克定律那样，切应力与切应变之间也存在类似的关系，即当切应力不超过材料的剪切比例极限（τ_p）时，切应力与切应变之间成正比关系，如图3－10所示的直线部分。这个关系，称为剪切胡克定律，可用下式表示：

$$\tau=G\gamma \tag{3-4}$$

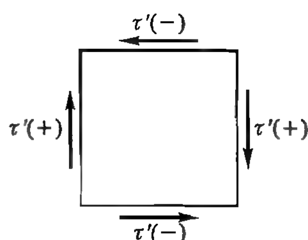


图 3－9

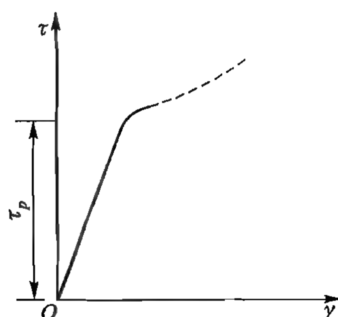


图 3－10

式中，G 为材料的剪切弹性模量，单位与弹性模量 E 相同，其数值可通过试验确定，钢材的 G 值约为 80 GPa。表 3－1 列举了几种材料剪切弹性模量的数值，其他材料的 G 值可查有关的手册。

与拉伸时的胡克定律一样，切应力互等定理和剪切胡克定律都是材料力学中的基本定律。在进行理论分析和试验研究中会经常用到它们。

表 3－1　材料的剪切弹性模量 G

材　　料	数值/GPa
钢	80～81
铸铁	45
铜	40～46
铝	26～27
木材	0.55

§3－4 圆轴扭转时的应力和变形

在工程实际中，用途最广的扭转构件是圆轴，为了进行圆轴扭转时的强度和刚度的计算，必须研究圆轴扭转时的应力和变形。

1. 圆轴扭转时的应力

分析圆轴扭转时的应力，与分析轴向拉压和薄壁圆筒扭转构件时的应力一样，首先需要明确横截面上存在什么应力？它的分布规律怎样？然后才能导出

应力的计算公式。为此，需要考虑三方面的关系：一是变形几何关系，二是应力应变关系，三是静力学关系。

（1）变形几何关系

为了确定圆轴横截面上存在什么应力及其分布规律，首先由试验出发，观察圆轴扭转时的变形。

与薄壁圆筒的扭转试验相同，取一易于变形的实心圆轴，先在其表面上作相邻的圆周线和纵向平行线，然后在轴的两端加上大小相等、转向相反的力偶，使其产生扭转变形，如图 3-11a、b 所示。当变形不大时，可以看到与薄壁圆筒扭转时相同的现象发生，即：圆周线的形状和大小不变，两相邻圆周线之间的距离不变，仅发生绕轴线的相对转动；纵向线都倾斜了一个角度 γ，圆轴表面上的矩形变成菱形。

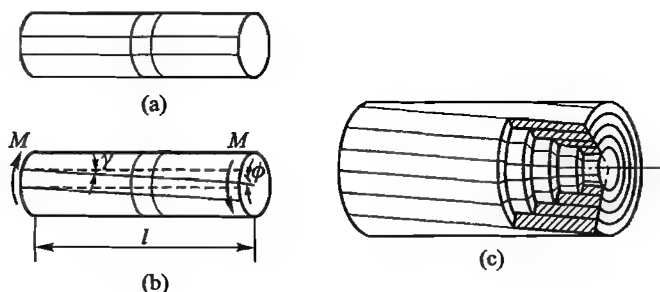


图 3-11

上述现象是圆轴的扭转变形在其表面的反映，根据这些现象可由表及里地推测圆轴内部的变形情况。可以设想，圆轴的扭转是无数层薄壁圆筒扭转的组合，其内部也存在同样的变形规律，如图 3-11c 所示。这样，根据圆周线形状大小不变，两相邻圆周线发生相对转动的现象，可以设想，圆轴扭转时各横截面如同刚性平面一样绕轴线作相对转动，即假设圆轴各横截面仍保持为一平面，且其形状大小不变；横截面上的半径亦保持为一直线，这个假设称**平截面假设**。它之所以能够成立，是因为根据此假设所得到的应力和变形的计算公式都能为试验结果所证实。此外，根据圆轴的形状和受力情况的对称性，也可证明这一假设的正确性。

根据上述试验现象还可推断，与薄壁圆筒扭转时的情况一样，圆轴扭转时其横截面上不存在正应力 σ，仅有垂直于半径方向的切应力 τ 作用。

下面分析切应变在圆轴内的变化规律。

如图 3-12a 所示，用截面 $m-m$ 和 $n-n$ 截取出一段长为 dx 的轴来观察，变形后截面 $n-n$ 相对于截面 $m-m$ 转动了一个角度。由于截面 $n-n$ 是作刚性

转动，因此其上的两个半径 O_2C 和 O_2D 仍保持为一直线，它们都转动了同一角度 $\mathrm{d}\phi$ 而达到新位置 O_2C' 和 O_2D'。这时圆轴表面上矩形 $ABCD$ 的直角发生了变化，其改变量 γ 就是圆轴表面处单元体的切应变。如果再由这一小段轴中取出如图 3－12b 所示的楔形体，则可以得到

$$\gamma = \frac{CC'}{AC} = \frac{\gamma\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}$$

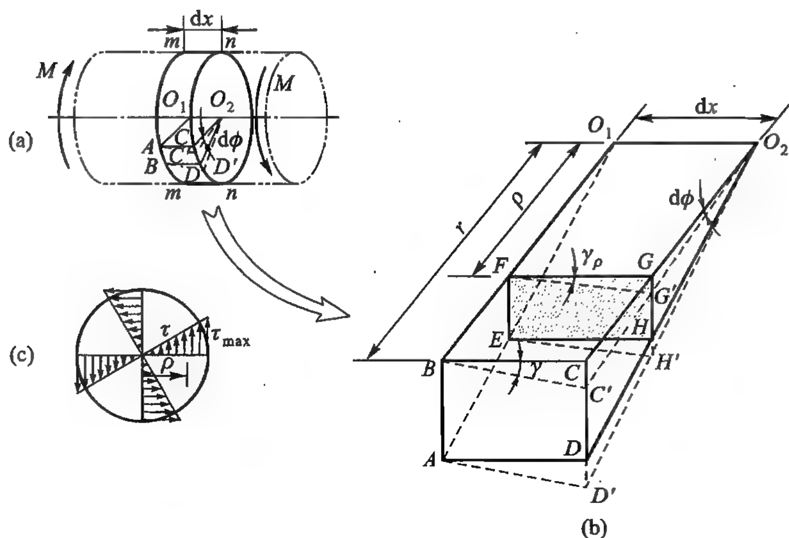


图 3－12

同样，在距离轴线为 ρ 的地方，矩形 $EFGH$ 变形到 $EFG'H'$，则相当于半径为 ρ 的一层薄壁圆筒其切应变为

$$\gamma_\rho = \frac{GG'}{FG} = \frac{\rho\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} \tag{a}$$

这就是圆轴扭转时切应变沿半径方向的变化规律。对于所取定的楔形体，式中的 $\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}$ 为一常数，所以上式表明，切应变 γ_ρ 与该处到轴线的距离 ρ 成正比，距离轴线越远，切应变越大，在圆轴表面处的切应变最大。知道了切应变的变化规律以后，根据应力与应变间的物理关系，便可得到切应力的变化规律。

（2）应力应变关系

由上一节知道，切应力与切应变之间存在一定的物理关系，当切应力不超过材料的剪切比例极限时，切应力与切应变成正比，即服从剪切胡克定律

$$\tau = G\gamma \tag{b}$$

将式（a）代入式（b）可以求得距轴线为 ρ 处的切应力为

$$\tau_\rho = G\gamma_\rho = G\rho\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} \tag{c}$$

这就是圆轴扭转时横截面上切应力的分布规律，它说明横截面上任一点处切应力的大小与该点到圆心的距离 ρ 成正比。也就是说，在横截面的圆心处切应力为零，在周边上切应力最大。切应力的分布如图 3－12c 所示，其方向垂直于半径。下面，只需建立应力与内力的关系，就可以计算扭转切应力了。

(3) 静力学关系

圆轴扭转时，平衡外力偶矩的扭矩，是由横截面上无数的微剪力组成的。如图 3－13 所示，设距圆心 ρ 处的切应力为 τ_ρ，如在此处取一微面积 $\mathrm{d}A$，则此微面积上的微剪力为 $\tau_\rho \mathrm{d}A$。各微剪力对轴线之矩的总和，即为该截面上的扭矩，即：

$$\int_A \rho\tau_\rho \mathrm{d}A = T$$

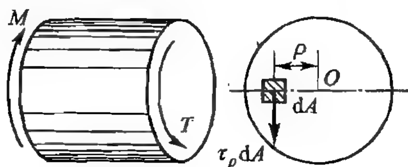


图 3－13

将式(c)代入，则

$$\int_A \rho\tau_\rho \mathrm{d}A = \int_A G\rho^2\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}A = T$$

式中剪切弹性模量 G 是一个常数，在取定的截面上，$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}$也是一个常数。因此可以将其提到积分号外，得

$$G\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\int_A \rho^2 \mathrm{d}A = T \tag{d}$$

式中的积分 $\int_A \rho^2 \mathrm{d}A$ 是一个只决定于横截面的形状和大小的几何量，称为横截面对形心的**极惯性矩**，可用 I_p 来表示，即令

$$\int_A \rho^2 \mathrm{d}A = I_p \tag{3-5}$$

I_p 的常用单位是 m^4 或 mm^4，对于任一已知的截面，I_p 是常数，因此式(d)可以写为

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} = \frac{T}{GI_p} \tag{3-6}$$

式中的$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}$表示圆轴的单位长度扭转角。此式表明扭矩 T 愈大，单位长度的扭转角愈大；在扭矩一定的情况下，GI_p 愈大，单位长度的扭转角愈小，GI_p 反映了圆轴抵抗扭转变形的能力，称为圆轴的**抗扭刚度**。将式(3－6)代入式(c)后得

$$\tau_\rho = G\rho\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} = G\rho\frac{T}{GI_p} = \frac{T}{I_p}\rho$$

即横截面上任一点处的切应力为

$$\tau_\rho = \frac{T}{I_p}\rho \tag{3-7}$$

式中:T——横截面上的扭矩;

ρ——横截面上任一点到圆心的距离;

I_p——横截面对形心的极惯性矩。

至此,已经得到了圆轴扭转时横截面上切应力的计算公式,剩下的问题是式中的 I_p 如何计算。

极惯性矩 I_p 应根据式(3-5)来计算,对于圆形截面,可取厚为 $\mathrm{d}\rho$ 的圆环为面积元素,如图 3-14a 所示,令 $\mathrm{d}A = 2\pi\rho\mathrm{d}\rho$,于是

$$\begin{aligned} I_p &= \int_A \rho^2 \mathrm{d}A = \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^2 \cdot 2\pi\rho\mathrm{d}\rho \\ &= 2\pi\int_0^{\frac{d}{2}} \rho^3 \mathrm{d}\rho = 2\pi\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^{\frac{d}{2}} \\ &= \frac{\pi d^4}{32} \approx 0.1d^4 \end{aligned} \tag{3-8}$$

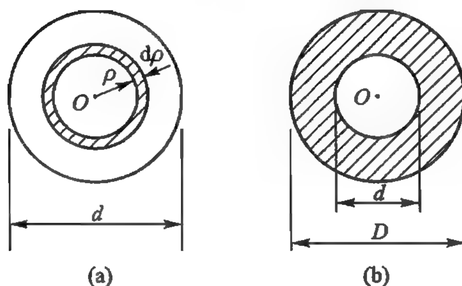


图 3-14

对于内径为 d、外径为 D 的空心圆截面(图 3-14b),它的极惯性矩为

$$\begin{aligned} I_p &= \int_A \rho^2 \mathrm{d}A = \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} 2\pi\rho^3 \mathrm{d}\rho = 2\pi\frac{\rho^4}{4}\Big|_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} \\ &= \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4) \approx 0.1(D^4 - d^4) \end{aligned} \tag{3-9a}$$

如令 $\frac{d}{D} = a$,则

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32}(1 - a^4) \approx 0.1D^4(1 - a^4) \tag{3-9b}$$

至此，圆轴扭转时横截面上任一点处的切应力便可以计算了。

例 3－2 一轴 AB 传递的功率为 $P=7.5\ \text{kW}$，转速 $n=360\ \text{r/min}$。轴的 AC 段为实心圆截面，CB 段为空心圆截面，如图 3－15 所示。已知 $D=30\ \text{mm}$，$d=20\ \text{mm}$。试计算 AC 段横截面边缘处的切应力以及 CB 段横截面上外边缘和内边缘处的切应力。

解：

(1) 计算扭矩　由式(3－1)，轴所受的外力偶矩为

$$M=9\ 550\frac{P}{n}=9\ 550\times\frac{7.5}{360}\ \text{N}\cdot\text{m}=199\ \text{N}\cdot\text{m}$$

由截面法，各横截面上的扭矩均为

$$T=M=199\ \text{N}\cdot\text{m}$$

(2) 计算极惯性矩　由式(3－8)及式(3－9)，AC 段和 CB 段轴横截面的极惯性矩分别为

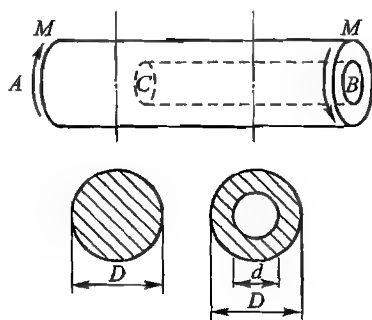


图 3－15

$$I_{p1}=\frac{\pi D^4}{32}=\frac{3.14\times(30\ \text{mm})^4}{32}=7.95\times10^{-8}\ \text{m}^4$$

$$I_{p2}=\frac{\pi}{32}(D^4-d^4)=\frac{3.14}{32}[(30\ \text{mm})^4-(20\ \text{mm})^4]=6.38\times10^{-8}\ \text{m}^4$$

(3) 计算应力　由式(3－7)，AC 段轴在横截面边缘处的切应力为

$$\tau_{外}^{AC}=\frac{T}{I_{p1}}\cdot\frac{D}{2}=\frac{199\ \text{N}\cdot\text{m}}{7.95\times10^{-8}\ \text{m}^4}\times0.015\ \text{m}=37.5\times10^6\ \text{Pa}=37.5\ \text{MPa}$$

CB 段轴横截面内、外边缘处的切应力分别为：

$$\tau_{内}^{CB}=\frac{T}{I_{p2}}\cdot\frac{d}{2}=\frac{199\ \text{N}\cdot\text{m}}{6.38\times10^{-8}\ \text{m}^4}\times0.01\ \text{m}=31.2\times10^6\ \text{Pa}=31.2\ \text{MPa}$$

$$\tau_{外}^{CB}=\frac{T}{I_{p2}}\cdot\frac{D}{2}=\frac{199\ \text{N}\cdot\text{m}}{6.38\times10^{-8}\ \text{m}^4}\times0.015\ \text{m}=46.8\times10^6\ \text{Pa}=46.8\ \text{MPa}$$

2. 圆轴扭转时的变形

前面已述，圆轴扭转时，两横截面间将有相对的角位移，称为扭转角。这就是通常工程实际中要计算的扭转变形。在推导圆轴扭转切应力公式时，扭转角的计算问题，已接近于解决，在此只需稍加推导便可以了。

由式(3－6)，可得到相距 $\text{d}x$ 的两横截面间的相对扭转角(图 3－12)为

$$\text{d}\phi=\frac{T}{GI_p}\text{d}x$$

因此，当扭矩为常数时，距离为 l 的两横截面间的扭转角则为

$$\phi=\int_l \text{d}\phi=\int_0^l\frac{T}{GI_p}\text{d}x$$

由此得

$$\phi=\frac{Tl}{GI_p}\qquad(3-10)$$

式中：T——横截面上的扭矩；

l——两横截面间的距离；

G——材料的剪切弹性模量；

I_p——横截面对圆心的极惯性矩。

式(3-10)即为等直圆轴扭转变形的计算公式。从该式可以看到：扭转角与扭矩和圆轴的长度成正比，与圆轴的抗扭刚度 GI_p 成反比。扭转角的单位是 rad(弧度)。

§3-5 圆轴扭转时的强度和刚度计算

1. 强度计算

前面已经得到，圆轴扭转时横截面上的切应力计算公式为

$$\tau_\rho = \frac{T}{I_p}\rho$$

显然，在截面的周边上，即当 $\rho = \rho_{max} = r$ 时，有最大切应力

$$\tau_{max} = \frac{T}{I_p}r = \frac{T}{I_p/r}$$

式中圆半径 $r=\rho_{max}$ 和极惯性矩 I_p 都是与截面有关的几何量，故可用

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{max}} = \frac{I_p}{r} \tag{3-11}$$

来表示它们的比值，称为**抗扭截面系数**，其单位是 m^3 或 mm^3。故最大切应力为

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_p} \tag{3-12}$$

为保证轴安全地工作，要求轴内的最大切应力必须小于材料的扭转许用切应力[τ]，因此圆轴扭转时的强度条件为

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_p} \leqslant [\tau] \tag{3-13}$$

式中的扭转许用切应力[τ]，是根据扭转试验，并考虑适当的安全因数确定的，它与许用拉应力[σ]有如下的近似关系：

对于塑性材料，$[\tau] = (0.5-0.6)[\sigma]$

对于脆性材料，$[\tau] = (0.8-1.0)[\sigma]$

因此也可利用拉伸时的许用应力[σ]来估计扭转许用切应力[τ]。对于机器中轴一类的构件，由于轴除扭转外，往往还有弯曲变形，而且轴的应力常随时间而改变，故所用的[τ]值还要更低一些。

运用上述强度条件时，还需计算出横截面的抗扭截面系数 W_p，对于实心圆截面，

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{max}} = \frac{\pi d^4}{32} \Big/ \frac{d}{2} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0.2d^3 \tag{3-14}$$

对于空心圆截面，

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{max}} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} \Big/ \frac{D}{2} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D} \tag{3-15a}$$

或

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}(1 - \alpha^4) \approx 0.2D^3(1 - \alpha^4) \tag{3-15b}$$

式中，$\alpha = \frac{d}{D}$。

2. 刚度计算

扭转构件除需满足强度条件外，还需满足刚度方面的要求，否则将不能正常地进行工作。例如，机器中的轴如扭转变形过大，就会影响机器的精密度，或者使机器在运转过程中产生较大的振动。因此对圆轴的扭转变形需要有一定的限制。通常要求单位长度的扭转角不能超过某一许用值，即扭转构件应满足刚度条件

$$\varphi = \frac{\phi}{l} = \frac{T}{GI_p} \leqslant [\varphi] \tag{3-16}$$

式中 φ 是单位长度的扭转角，$[\varphi]$ 为单位长度的许用扭转角，两者的单位皆为 rad/m(弧度/米)。但在工程实际中 $[\varphi]$ 的常用单位为 $^{(\circ)}$/m(度/米)。如果使 φ 也采用 $^{(\circ)}$/m，则上述的刚度条件又可写成

$$\varphi = \frac{T}{GI_p} \times \frac{180}{\pi} \leqslant [\varphi] \tag{3-17}$$

单位长度的许用扭转角 $[\varphi]$，是根据载荷性质和工作条件等因素决定的。在精密、稳定的传动中，$[\varphi] = 0.25^{(\circ)}/\text{m} \sim 0.5^{(\circ)}/\text{m}$；在一般传动中，$[\varphi] = 0.5^{(\circ)}/\text{m} \sim 1^{(\circ)}/\text{m}$；在精度要求不高的传动中，$[\varphi] = 2^{(\circ)}/\text{m} \sim 4^{(\circ)}/\text{m}$。其具体数值可由有关设计手册中查到。

例 3-3 已知解放牌汽车主传动轴(图 3-16)传递的最大扭矩 $T = 1\ 930$ N·m，传动轴用外径 $D = 89$ mm、壁厚 $\delta = 2.5$ mm 的钢管做成。材料为 20 钢，其许用切应力 $[\tau] = 70$ MPa。校核此轴的强度。

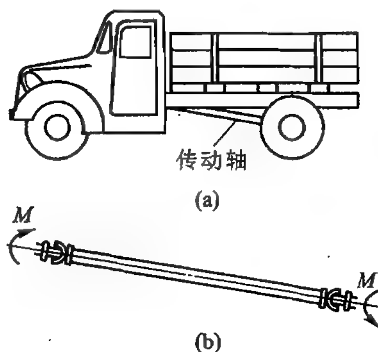


图 3-16

解：

(1)计算抗扭截面系数

以

$$D = 89 \text{ mm}$$

$$d = 89 \text{ mm} - 5 \text{ mm} = 84 \text{ mm}$$

$$\alpha = \frac{d}{D} = 0.945$$

代入式(3－15b),得

$$W_p = 0.2D^3(1-\alpha^4)$$
$$= 0.2 \times 89^3(1-0.945^4)\ \text{mm}^3 = 2.9 \times 10^4\ \text{mm}^3$$

(2) 强度校核　由强度条件式(3－13),得

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_p} = \frac{1\ 930\ \text{N}\cdot\text{m}}{29 \times 10^{-6}\ \text{m}^3} = 66.7 \times 10^6\ \text{Pa} = 66.7\ \text{MPa} < [\tau] = 70\ \text{MPa}$$

故轴满足强度条件。

上例中,如果传动轴不用钢管而采用实心圆轴,并使其与钢管有同样的强度(即两者的最大切应力相同),则由

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_p} = \frac{T}{0.2d^3}$$

可得

$$d = \sqrt[3]{\frac{T}{0.2\tau_{max}}} = \sqrt[3]{\frac{1\ 930\ \text{N}\cdot\text{m}}{0.2 \times 66.7 \times 10^6\ \text{Pa}}} = 0.053\ \text{m} = 53\ \text{mm}$$

此时,根据空心轴与实心轴的截面尺寸算出两者横截面面积之比为

$$\frac{A_{空}}{A_{实}} = \frac{8.5}{28.2} = 0.303$$

可见,采用钢管时,其重量只有实心圆轴的约30%,耗费的材料要少得多。

为什么扭转构件采用空心圆截面时能节约大量材料呢？从圆轴扭转时横截面上的切应力分布不难说明这个问题。圆轴扭转时横截面上的应力沿半径方向是按直线规律分布的(图3－17a),中心部分的应力很小,材料没有得到充分利用,如果将这部分材料移到离圆心较远的位置,让它充分发挥作用(图3－17b),这样就大大提高了轴的承载能力。在工程实际中,以钢管代替实心轴,不仅节约材料,还可以减轻机器的自重。但应注意,当采用焊接钢管做抗扭构件时,必须保证焊缝质量,一旦焊接不好而形成开口的时候(图3－17c),抗扭能力将大为降低。

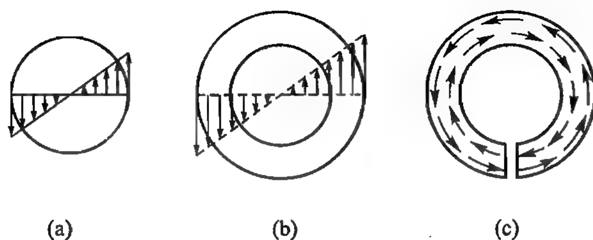


图3－17

例3－4　5 t单梁吊车,大梁的行走机构如图3－18所示。已知电动机功率 $P=$

3.7 kW,经减速后车轴的转速为 $n = 32.6$ r/min。试选择传动轴 CD 的直径,并校核其扭转刚度。轴用45钢,其许用切应力$[\tau] = 40$ MPa,剪切弹性模量 $G = 80 \times 10^3$ MPa,许用扭转角$[\varphi] = 1^{(°)}/\text{m}$。

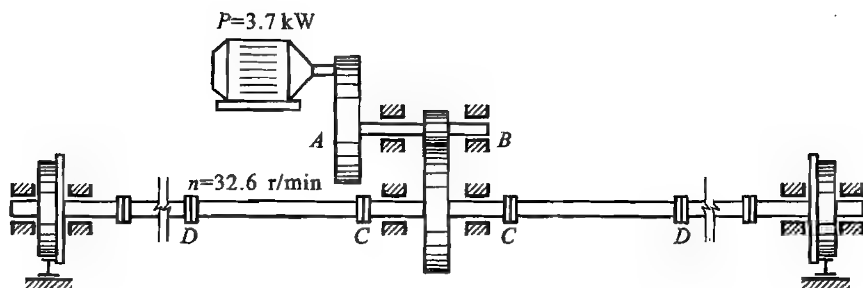


图 3-18

解:

(1) 计算扭矩　马达的功率通过传动轴传递给两个车轮,故每个车轮所消耗的功率为

$$P_{轮} = \frac{P}{2} = \frac{3.7}{2} \text{ kW} = 1.85 \text{ kW}$$

轴 CD 各截面上的扭矩等于车轮所受的外力偶矩 $M_{轮}$,则由式(3-1),

$$T = M_{轮} = 9\ 550 \frac{P_{轮}}{n} = 9\ 550 \times \frac{1.85}{32.6} \text{ N} \cdot \text{m} = 543 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

(2) 计算轴的直径　由强度条件式(3-13)得

$$W_p \geqslant \frac{T}{[\tau]}$$

即

$$0.2d^3 \geqslant \frac{T}{[\tau]}$$

故

$$d \geqslant \sqrt[3]{\frac{T}{0.2[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{543 \text{ N} \cdot \text{m}}{0.2 \times 40 \times 10^6 \text{ Pa}}} = 0.040\ 7 \text{ m} = 40.7 \text{ mm}$$

选取轴的直径 $d = 45$ mm。

(3) 校核轴的刚度　由刚度条件式(3-17),轴每米的扭转角为

$$\varphi = \frac{T}{GI_p} \times \frac{180}{\pi} = \frac{543}{80 \times 10^9 \times 0.1 \times 0.045^4} \times \frac{180}{3.14} \ ^{(°)}/\text{m} = 0.945^{(°)}/\text{m} < [\varphi] = 1^{(°)}/\text{m}$$

满足刚度条件。

例 3-5　一传动轴如图 3-19a 所示,已知轴的直径 $d = 45$ mm,转速 $n = 300$ r/min。主动轮输入的功率 $P_A = 36.7$ kW;从动轮 B、C、D 输出的功率分别为 $P_B = 14.7$ kW、$P_C = P_D = 11$ kW。轴的材料为45钢,$G = 80 \times 10^3$ MPa,$[\tau] = 40$ MPa,$[\varphi] = 2^{(°)}/\text{m}$,试校核轴的强度和刚度。

解:

(1) 计算外力偶矩　由式(3-1),得:

$$M_A = 9\ 550\frac{P_A}{n} = 9\ 550 \times \frac{36.7}{300}\ \text{N}\cdot\text{m} = 1\ 170\ \ \text{N}\cdot\text{m}$$

$$M_B = 9\ 550\frac{P_B}{n} = 9\ 550 \times \frac{14.7}{300}\ \text{N}\cdot\text{m} = 468\ \ \text{N}\cdot\text{m}$$

$$M_C = M_D = 9\ 550\frac{P_C}{n} = 9\ 550 \times \frac{11}{300}\ \text{N}\cdot\text{m} = 351\ \ \text{N}\cdot\text{m}$$

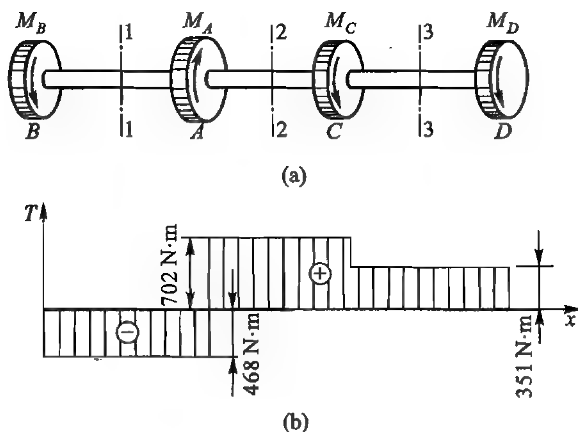


图 3-19

(2) 画扭矩图,求最大扭矩　用截面法求得 AB、AC、CD 各段的扭矩分别为:

$$T_1 = -M_B = -468\ \ \text{N}\cdot\text{m}$$

$$T_2 = M_A - M_B = (1\ 170 - 468)\ \text{N}\cdot\text{m} = 702\ \ \text{N}\cdot\text{m}$$

$$T_3 = M_A - M_B - M_C = (1\ 170 - 468 - 351)\ \text{N}\cdot\text{m} = 351\ \ \text{N}\cdot\text{m}$$

其扭矩图如图 3-19b 所示。

由图可见,在 AC 段内的扭矩最大,为

$$T_{\max} = 702\ \ \text{N}\cdot\text{m}$$

因为这是一根等截面轴,故危险截面就在此段轴内。

(3) 强度校核　按强度条件式(3-13),

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_p} = \frac{702}{0.2 \times 0.045^3}\ \text{Pa} = 38.8 \times 10^6\ \ \text{Pa}$$

$$= 38.8\ \ \text{MPa} < [\tau] = 40\ \ \text{MPa}$$

满足强度条件。

(4) 刚度校核　按刚度条件式(3-17),

$$\varphi_{\max} = \frac{T_{\max}}{GI_p} \times \frac{180}{\pi} = \frac{702}{80 \times 10^9 \times 0.1 \times 0.045^4} \times \frac{180}{3.14}\ ^{(\circ)}/\text{m} = 1.23^{(\circ)}/\text{m} < 2^{(\circ)}/\text{m} = [\varphi]$$

故满足刚度条件。

最后必须指出，上面导出的扭转切应力公式(3-7)和扭转变形公式(3-8)等，仅适用于圆形截面的构件。对于非圆截面杆，则不适用。例如取一矩形截面杆在其表面画上垂直和平行于轴线的直线，然后在两端施加一对力偶使其产生扭转变形。可以看到，变形后，原来垂直于轴线的截面发生了翘曲，不再是一个平面了，而且在矩形截面的四个角上，小方格的直角并不改变(即切应变 $\gamma=0$)，在长边中点处方格的倾斜角度最大(即 γ 最大)。由此可见，横截面上的切应力沿周边是变化的，其应力分布如图3-20所示。对于其他非圆截面杆的扭转，都有类似的现象。综上所述，非圆截面杆扭转与圆轴扭转的基本差别，在于其横截面不再保持为平面，而要发生翘曲，因此，应力与变形的计算等，均与圆轴扭转时不同，且随截面形状而异。

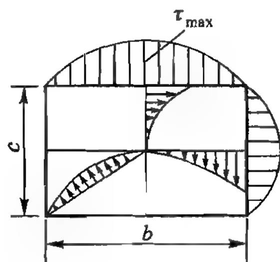


图3-20

小 结

本章所研究的内容是圆轴的扭转，要解决的是强度与刚度问题。

设计圆轴截面时，应同时考虑到强度条件和刚度条件，对于某些传动轴其刚度条件往往更为重要。

1. 圆轴或圆管扭转时，其横截面上仅有切应力。通过薄壁圆筒的分析和试验，得到

切应力互等定理　　$\tau=\tau'$

剪切胡克定律　　$\tau=G\gamma$

这两个规律是研究圆轴扭转时的应力和变形的理论基础，在材料力学的理论分析和试验研究中也经常用到。

2. 圆轴扭转时，横截面上的切应力垂直于半径沿半径方向呈线性分布；两截面间将产生相对扭转角。计算的基本公式是：

扭转切应力公式　　$\tau_\rho=\dfrac{T}{I_p}\rho$

扭转变形公式　　$\phi=\dfrac{Tl}{GI_p}$

主要的应用公式是：

强度条件　　$\tau_{max}=\dfrac{T}{W_p}\leqslant[\tau]$

刚度条件　　$\varphi=\dfrac{T}{GI_p}\times\dfrac{180}{\pi}\leqslant[\varphi]$

应用公式是在基本公式的基础上建立的，理解了两个基本公式之后，对强度条件和刚度条件也就易于掌握了。

3. 学习本章时应注意的问题是，上述的应力、变形公式及强度、刚度条件只适用于圆轴的扭转，对于非圆截面杆的扭转则不适用。

4. 解题的方法步骤

(1) 计算外力偶矩。

(2) 计算内力——扭矩，并画出扭矩图。

(3) 进行强度、刚度计算。

5. 题目类型

(1) 扭矩的计算并画出扭矩图(如例 3－1)。

(2) 圆轴扭转的强度计算(如例 3－3)。

(3) 圆轴扭转的刚度计算(如例 3－4)。

(4) 圆轴扭转时的强度与刚度同时考虑(如例 3－5)。

 思考题

3－1 如图 3－21 所示的单元体，已知其一个面上的切应力 τ，问其他几个面上的切应力是否可以确定？怎样确定？

3－2 当单元体上同时存在切应力和正应力时，切应力互等定理是否仍然成立？为什么？

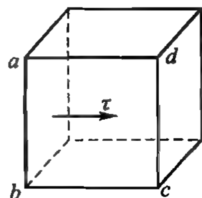


图 3－21

3－3 在切应力作用下单元体将发生怎样的变形？剪切胡克定律说明什么？它在什么条件下才成立？

3－4 在例 3－4 的图 3－18 中，如果仅考虑轴的扭转强度，是否可以估计出，电动机主轴、齿轮轴 AB 和传动轴 CD 这三根轴的直径，哪一根轴应该大些？哪一根轴应该小些？为什么？

3－5 如图 3－22 所示的两个传动轴，试问哪一种轮的布置对提高轴的承载能力有利？

3－6 一空心圆轴的截面如图 3－23，它的极惯性矩 I_p 和抗扭截面系数 W_p 是否可以按下式计算：

$$I_p = I_{p外} - I_{p内} = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32}$$

$$W_p = W_{p外} - W_{p内} = \frac{\pi D^3}{16} - \frac{\pi d^3}{16}$$

为什么？

3－7 在剪切实用计算中所采用的许用切应力$[\tau]$与扭转许用切应力$[\tau]$是否相同？为什么？

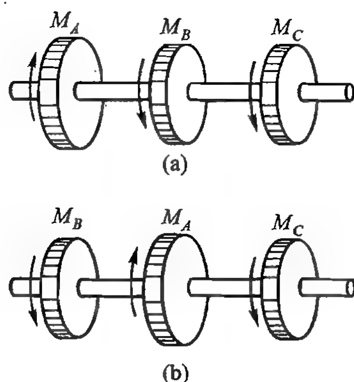


图 3－22

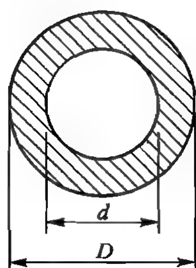


图 3－23

3－8 直径 d 和长度 l 都相同，而材料不同的两根轴，在相同的扭矩作用下，它们的最大切应力 τ_{max} 是否相同？扭转角 ϕ 是否相同？为什么？

3－9 从强度方面考虑，空心圆截面轴为什么比实心圆截面轴合理？空心圆截面轴的壁厚是否愈薄愈好？

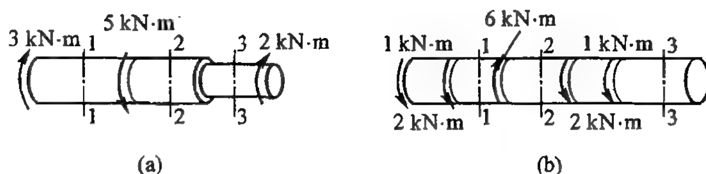
3－10 如何计算圆轴的扭转角？其单位是什么？何谓抗扭刚度？圆轴抗扭刚度条件是如何建立的？应用该条件时应注意什么？

3－11 试说明非圆截面杆扭转时，横截面周边处的切应力必与截面周边相切，且外凸尖角处的切应力必定为零。

3－12 在圆轴和薄壁圆筒扭转的切应力公式推导过程中，所作的假定有何区别？两者所得的切应力计算公式之间有什么关系？

习 题

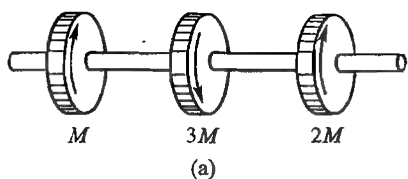
3－1 试求图示各轴在指定横截面 1－1、2－2 和 3－3 上的扭矩，并在各截面上表示出扭矩的转向。

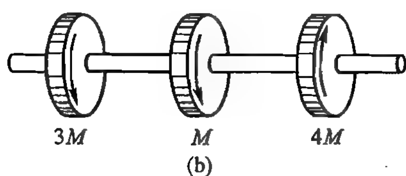


题 3－1 图

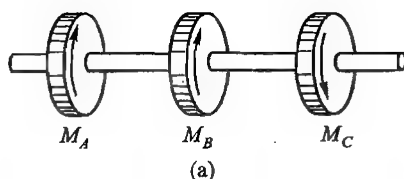
3－2 试绘出下列各轴的扭矩图，并求 $|T|_{max}$。

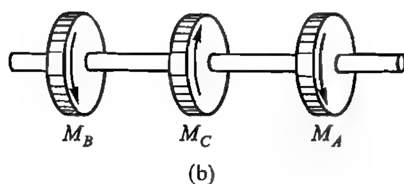
3－3 试绘下列各轴的扭矩图，并求出 $|T|_{max}$。已知 $M_A = 200$ N·m，$M_B = 400$ N·m，$M_C = 600$ N·m。





题 3－2 图





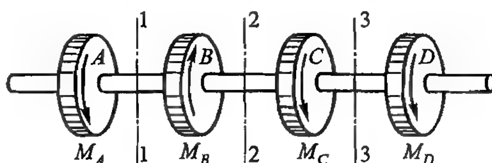
题 3－3 图

3－4 一传动轴如图所示，已知 $M_A=1.3\ \text{N}\cdot\text{m}$，$M_B=3\ \text{N}\cdot\text{m}$，$M_C=1\ \text{N}\cdot\text{m}$，$M_D=0.7\ \text{N}\cdot\text{m}$；各段轴的直径分别为：

$$d_{AB}=50\ \text{mm},\quad d_{BC}=75\ \text{mm},\quad d_{CD}=50\ \text{mm}$$

（1）画出扭矩图；

（2）求 1－1、2－2、3－3 截面的最大切应力。



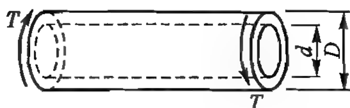
题 3－4 图

3－5 图示的空心圆轴，外径 $D=80\ \text{mm}$，内径 $d=62.5\ \text{mm}$，承受扭矩 $T=1\ 000\ \text{N}\cdot\text{m}$。

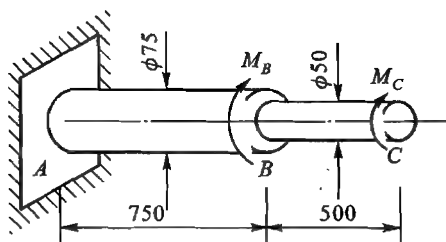
（1）求 $\tau_{\max}$，$\tau_{\min}$；

（2）绘出横截面上的切应力分布图；

（3）求单位长度扭转角，已知 $G=80\times10^3\ \text{MPa}$。



题 3－5 图



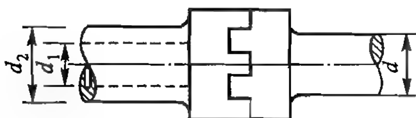
题 3－6 图

3-6 已知变截面钢轴上的外力偶矩 $M_B=1\ 800\ N\cdot m$,$M_C=1\ 200\ N\cdot m$,试求最大切应力和最大相对扭转角。已知 $G=80\times10^9\ Pa$。

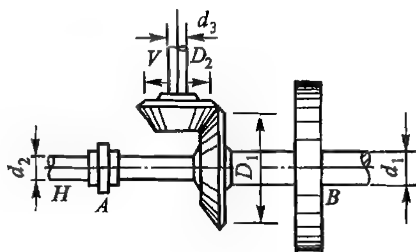
3-7 一钢轴的转速 $n=240\ r/min$。传递功率 $P=44.1\ kN\cdot m$。已知 $[\tau]=40\ MPa$,$[\varphi]=1^{(\circ)}/m$,$G=80\times10^3\ MPa$,试按强度和刚度条件计算轴的直径。

3-8 图示实心轴通过牙嵌离合器把功率传给空心轴。传递的功率 $P=7.5\ kW$,轴的转速 $n=100\ r/min$,试选择实心轴直径 d 和空心轴外径 d_2。已知 $d_1/d_2=0.5$,$[\tau]=40\ MPa$。

3-9 图示 AB 轴的转速 $n=120\ r/min$,从 B 轮上输入功率 $P=40\ kW$,此功率的一半通过锥齿轮传给铅垂轴 V,另一半功率由水平轴 H 传走。已知锥齿轮的节圆直径 $D_1=600\ mm$,$D_2=240\ mm$;各轴直径为 $d_1=100\ mm$,$d_2=80\ mm$,$d_3=60\ mm$,$[\tau]=20\ MPa$,试对各轴进行强度校核。



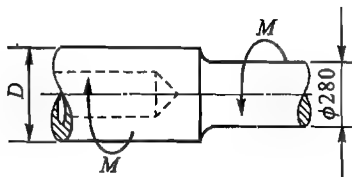
题 3-8 图



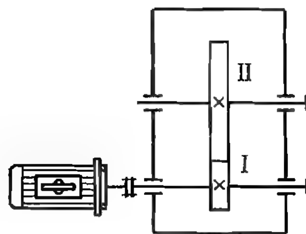
题 3-9 图

3-10 船用推进器的轴,一段是实心的,直径为 280 mm,另一段是空心的,其内径为外径的一半。在两段产生相同的最大切应力的条件下,求空心部分轴的外径 D。

3-11 有一减速器如图所示。已知电动机的转速 $n=960\ r/min$,功率 $P=5\ kW$;轴的材料为 45 钢,$[\tau]=40\ MPa$,试按抗扭强度条件计算减速器第一轴的直径。



题 3-10 图



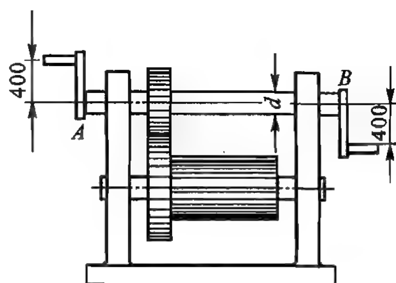
题 3-11 图

3-12 一传动轴传递功率 $P=3\ kW$,转速 $n=27\ r/min$,材料为 45 钢,许用切应力 $[\tau]=40MPa$,试计算轴的直径。

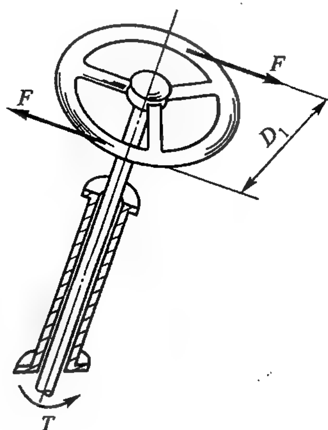
3-13 一钢制传动轴,受扭矩 $T=4\ kN\cdot m$,材料的剪切弹性模量 $G=80\times10^3\ MPa$,许用切应力 $[\tau]=40\ MPa$,单位长度的许用扭转角 $[\varphi]=1^{(\circ)}/m$,试计算轴的直径。

3-14 手摇绞车驱动轴 AB 的直径 $d=30\ mm$,由两人摇动,每人加在手柄上的力 $F=250\ N$,若轴的许用切应力 $[\tau]=40\ MPa$,试校核 AB 轴的强度。

3-15 汽车的驾驶盘如图所示，驾驶盘的直径 $D_1=520$ mm，驾驶员每只手作用于盘上的最大切向力 $F=200$ N，转向轴材料的许用切应力 $[\tau]=50$ MPa，试设计实心转向轴的直径。若改为 $\alpha=\frac{d}{D}=0.8$ 的空心轴，则空心轴的内径和外径各多大？并比较两者的重量。



题 3-14 图



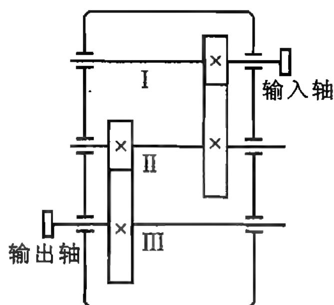
题 3-15 图

3-16 二级齿轮减速箱如图所示。已知输入功率为 10 kW，又知减速箱轴Ⅱ的转速为 1 530 r/min，轴的直径 $d=25$ mm，许用切应力 $[\tau]=30$ MPa。试按抗扭强度条件校核轴Ⅱ的强度。

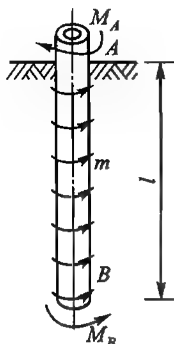
3-17 已知钻探机钻杆的外径 $D=60$ mm，内径 $d=50$ mm，功率 $P=7.36$ kW，转速 $n=180$ r/min，钻杆入土深度 $l=40$ m，$[\tau]=40$ MPa。假设土壤对钻杆的阻力沿钻杆长度均匀分布，试求：

（1）单位长度上土壤对钻杆的阻力矩 t；

（2）作钻杆的扭矩图，并进行强度校核。



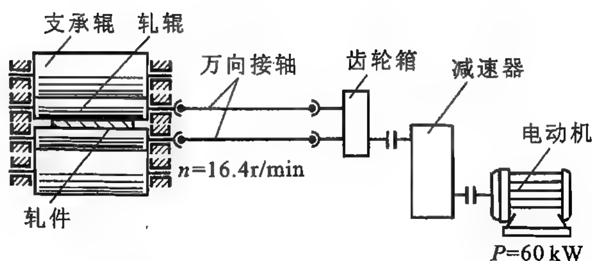
题 3-16 图



题 3-17 图

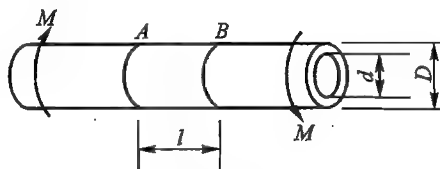
3-18 四辊轧机的传动机构如图所示，已知万向接轴的直径 $d=110$ mm，材料为 40 Cr，其剪切屈服点 $\tau_s=450$ MPa，转速 $n=16.4$ r/min；轧机电动机的功率 $P=60$ kW。试求此轴的

安全因数。



题 3 - 18 图

3 - 19 一薄壁钢管受外力偶矩 $M=2\ \text{kN}\cdot\text{m}$ 作用。已知外径 $D=60\ \text{mm}$，内径 $d=50\ \text{mm}$，材料的弹性模量 $E=210\ \text{GPa}$，现测得管表面上相距 $l=200\ \text{mm}$ 的 AB 两截面相对扭转角 $\varphi_{AB}=0.43°$，试求材料的泊松比。



题 3 - 19 图

3 - 20 在设备中，若传动轴传递的力偶矩 $M=1.08\ \text{kN}\cdot\text{m}$，材料的许用应力 $[\tau]=40\ \text{MPa}$，$G=80\ \text{GPa}$，$[\varphi]=0.5^{(°)}/\text{m}$，试设计轴的直径。

第四章 弯曲内力

§4－1 工程实际中的弯曲问题

弯曲是工程实际中常见的一种基本变形形式。图 4－1 所示的单梁吊车横梁，图 4－2 所示的车轴及图 4－3 所示的托架等，都是弯曲变形的构件；图 4－4 所示的齿轮轴，除扭转等变形外，也有弯曲变形。这些构件的共同特点是：它们都可简化为一根直杆；在通过轴线的平面内，受到垂直于杆轴线的外力（横向力）或外力偶作用。在这样的外力作用下，杆的轴线将弯曲成一条曲线，如上述各图中的虚线所示。这种变形形式称为弯曲。以弯曲为主要变形的构件，通常称为梁。

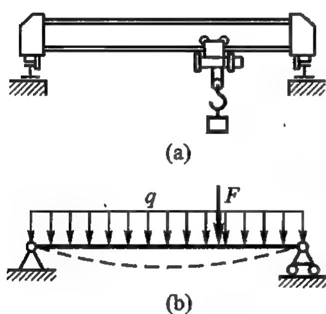


图 4－1

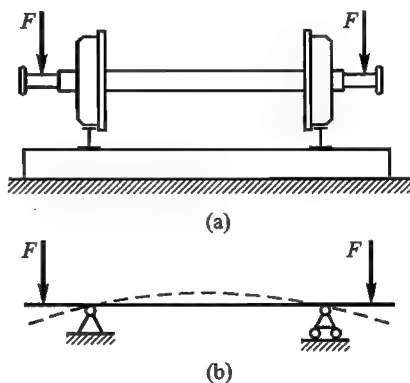


图 4－2

在工程实际中，大多数梁的横截面都有一根对称轴，如图 4－5 所示。通过梁轴线和截面对称轴的平面称为纵向对称面。当梁上外力位于纵向对称面内时，梁的轴线将弯曲成一条位于纵向对称面内的平面曲线，则称之对称弯曲（图 4－6）。对称弯曲是工程实际中最简单和最常见的情况，本章、第五章及第六章将讨论对称弯曲的情况。

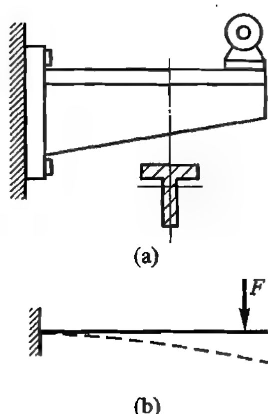


图 4－3

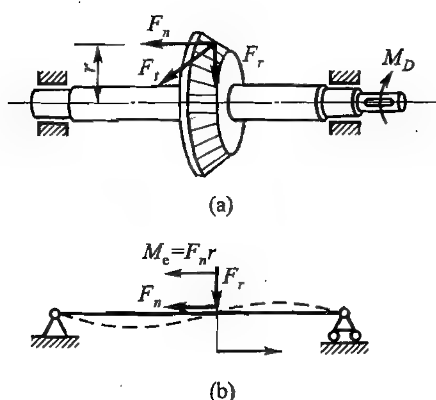


图 4－4

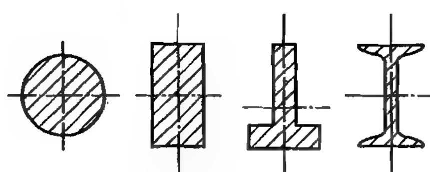


图 4－5

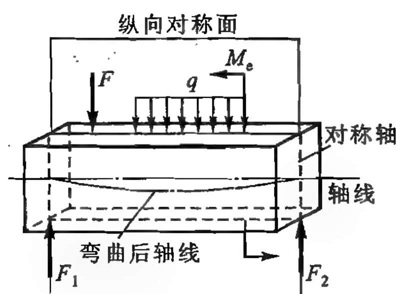


图 4－6

对梁进行分析计算，首先须将实际构件简化为一个计算简图，下面举例说明。

厂房中的吊车梁（图 4－1a）可作如下的简化：由于截面的形状和尺寸对内力的计算并无影响，因而可将吊车梁简化为一根直杆，并以其轴线来表示；因电葫芦的轮距远小于梁长，故可将其对吊车的压力近似地视为一集中力；吊车梁的自重则简化为沿梁长均匀分布的载荷；行车时如吊车梁向左或向右偏移；总有一端的轨道能起阻止作用，因而可将一端的约束视为固定铰支座，另一端则为可动铰支座。最后得如图 4－1b 所示的计算简图。

图 4－2a 所示的车轴，由车轮支承于钢轨上，车体的重力通过轴承作用于车轴的两端。由于轴承宽度不大，故可将此力简化为一集中力 F；钢轨通过车轮给车轴的约束，可简化为固定铰支座和可动铰支座（图 4－2b）。

图 4－3a 所示的托架，一端没有约束，为自由端，另一端与刚性面紧固连接，应简化为固定端支座。因托架为一变截面梁，其轴线并不水平，但因此而引起的

计算误差不大，故仍可近似地将其简化为一水平的直梁（图 4－3b）。

在机械传动中，常使用斜齿轮和锥齿轮。图 4－4a 所示的齿轮轴，以止推轴承和径向轴承支承，一端作用有扭转力矩 M_D，在锥齿轮上的啮合力可分解为径向力 F_r、切向力 F_t 和轴向力 F_n。当轴产生弯曲变形时，由于二轴承不能约束齿轮轴在弯曲平面内的微小转动，故止推轴承可简化为固定铰支座，径向轴承则简化为可动铰支座。将力 F_n 平移至齿轮中心，则它对轴的作用可简化为一个矩为 $M_e = F_n r$ 的力偶和一个轴向推力 F_n。传动轴在载荷作用下发生多种基本变形，本章只研究轴的弯曲变形，最后可得齿轮轴在竖向平面内的计算简图如图4－4b 所示。

由上述各例可见，分析计算一弯曲构件时，都进行了三个方面的简化：一是构件几何形状的简化，二是载荷的简化，三是支座的简化。

对构件的几何形状作简化时，可暂不考虑构件截面的具体形状，忽略一些构造上的枝节，将其简化为一直杆，并用构件的轴线来表示。

载荷一般可简化为三种形式：集中载荷、分布载荷和集中力偶。均匀分布的载荷又称均布载荷，分布在单位长度上的载荷称为载荷的集度，一般以 q 表示。集度的单位为 N/m 或 kN/m。

构件的支承方式常可简化为固定铰支座、可动铰支座和固定端支座三种。

根据梁的支承情况，在工程实际中常见的梁有以下三种基本形式：

① **简支梁**　梁的一端为固定铰支座，另一端为可动铰支座。如图 4－1b 和 4－4b 所示。

② **外伸梁**　梁由一个固定铰支座和一个可动铰支座支承，梁的一端或两端伸出支座之外。如图 4－2b 所示。

③ **悬臂梁**　梁的一端固定，另一端自由。如图 4－3b 所示。

以上各种梁的支座反力皆可用静力平衡方程求得，统称为**静定梁**。

梁是工程实际中常用的构件，而且往往是机械和结构物中的主要构件。下面将分章讨论其内力、应力和变形。本章首先讨论梁弯曲时的内力。

§4－2 剪力和弯矩

为计算梁的应力和变形，必须首先确定梁的内力。下面研究梁横截面上的内力。

设有一简支梁 AB，受集中载荷 F_1、F_2、F_3 的作用（图 4－7a）现求距 A 端 x 处横截面 $m-m$ 上的内力。为此，先求出梁的支座反力 F_A、F_B，然后用截面法沿截面 $m-m$ 假想地将梁截为两部分，取左边部分为研究对象（图 4－7b）。由于作用于其上的外力 F_A 和 F_1 在垂直于梁轴方向的投影之和不为零，为保持左段

梁在垂直方向的平衡，在横截面上必然存在一个切于横截面的内力 F_S；由于左段梁上各外力对截面形心 O 之矩一般不能相互抵消，为保持该段梁不发生转动，在横截面上必然存在一个位于载荷平面内的内力偶，其力偶矩以 M 表示。由此可见，梁弯曲时横截面上一般存在两种内力，其中，内力 F_S 称为剪力，内力偶矩 M 称为弯矩。

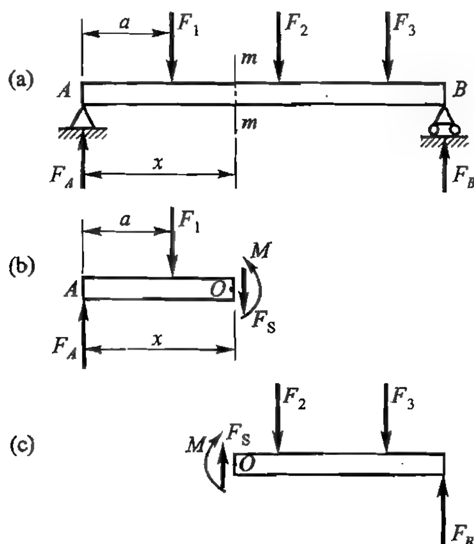


图 4-7

剪力 F_S 和弯矩 M 的大小、方向或转向，可根据所取研究对象的平衡方程来确定。现仍考虑左段梁的平衡，由

$$\sum F_y = 0, \quad F_A - F_1 - F_S = 0$$

得

$$F_S = F_A - F_1$$

由

$$\sum M_O = 0 - F_A x + F_1(x-a) + M = 0$$

得

$$M = F_A x - F_1(x-a)$$

在力矩式 $\sum M_O = 0$ 中，所取的力矩中心为横截面的形心 O。

若取右段梁为研究对象，用同样的方法也可得到截面 $m-m$ 上的剪力 F_S 和弯矩 M(图 4-7c)。分别取左段或右段梁为研究对象求得的同一截面上的剪力或弯矩，其值相等，方向或转向则相反，因为它们是作用与反作用的关系。为了使左右两段梁在同一截面上的内力正负号相同，须按梁的变形情况来规定内力的正负号。为此，取紧靠截面的微段梁来观察。我们规定：使此微段梁两相邻截面发生左上右下的相对错动时，横截面上的剪力为正，反之为负，如图 4-8a 所

示；使该微段梁弯曲成凹形时的弯矩为正，弯曲成凸形时的弯矩为负，如图4－8b所示。

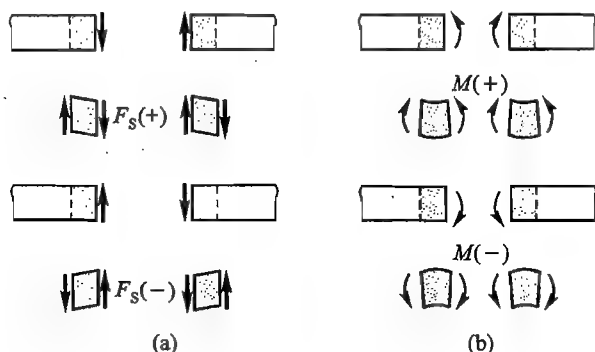


图 4－8

例 4－1　一简支梁 AB，如图 4－9a 所示，在 C 点处作用一集中力 $F=10$ kN，求距 A 端 0.8 m 处截面 $n-n$ 上的剪力和弯矩。

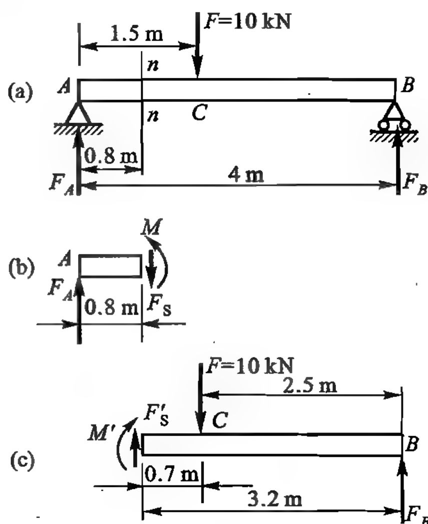


图 4－9

解：

（1）求支座反力　首先取整个梁为研究对象，由平衡方程求出梁的支座反力为：

$$F_A=6.25\ \text{kN}$$

$$F_B=3.75\ \text{kN}$$

（2）求剪力和弯矩　再用截面 $n-n$ 截取左段梁为研究对象，并设截面上剪力 F_S 的方向和弯矩 M 的转向均为正，如图 4－9b 所示。则由平衡方程：

$$\sum F_y=0,\quad F_A-F_S=0$$

得

$$F_S = F_A = 6.25\ \text{kN}$$

由

$$\sum M_O = 0, \quad -F_A \times 0.8\ \text{m} + M = 0$$

得

$$M = F_A \times 0.8\ \text{m} = (6.25 \times 10^3\ \text{N}) \times (0.8\ \text{m}) = 5 \times 10^3\ \text{N} \cdot \text{m} = 5\ \text{kN} \cdot \text{m}$$

所得的 F_S 和 M 都是正值，表示 F_S 和 M 的实际方向和转向与原设的相同，即均为正。

同样，也可截取右段梁为研究对象，并设截面上的剪力为 F'_S，弯矩为 M'，剪力的方向和弯矩的转向均为正，如图 4－9c 所示，则由平衡方程

$$\sum F_y = 0, \quad F'_S - F + F_B = 0$$

得

$$F'_S = F - F_B = 10 \times 10^3\text{N} - 3.75 \times 10^3\ \text{N} = 6.25 \times 10^3\ \text{N} = 6.25\ \text{kN}$$

由

$$\sum M_O = 0, \quad -M' - F \times 0.7\ \text{m} + F_B \times 3.2\ \text{m} = 0$$

得

$$M' = F_B \times 3.2\ \text{m} - F \times 0.7\ \text{m} = (3.75 \times 10^3\ \text{N}) \times (3.2\ \text{m}) - (10 \times 10^3\ \text{N}) \times (0.7\ \text{m})$$
$$= 5 \times 10^3\text{N} \cdot \text{m} = 5\ \text{kN} \cdot \text{m}$$

结果均为正值，F'_S 和 M' 与原设的方向和转向一致。

比较以上的计算结果，可以看出 F_S 与 F'_S 和 M 与 M' 的大小相等，方向和转向相反，按上述正负号规定，它们都是正方向和正转向。由此可见，无论取截面左边或截面右边部分为研究对象，其计算结果是相同的。至于取哪一边为好，这取决于计算上的方便。

在外力分析中，由平衡方程求出支座反力，它的正负号表示与原设方向一致或相反。在内力分析中，由梁的变形确定梁的内力的正负号，一律先假设内力为正，结果的正负号即表示内力的正负，也表示相应梁的变形情况。

从上述剪力和弯矩的计算过程中，我们可以看到这样一个规律：

横截面上的剪力在数值上等于此截面左侧（或右侧）梁上外力的代数和。

横截面上的弯矩在数值上等于此截面左侧（或右侧）梁上外力对该截面形心的力矩的代数和。

为了使所求得的剪力和弯矩符合前面的正负号规定，按此规律计算剪力时，截面左侧梁上的外力向上取正值，向下取负值；截面右侧梁上的外力向下取正值，向上取负值。计算弯矩时，截面左侧梁上外力对截面形心的力矩顺时针转向取正值，逆时针转向取负值；截面右侧外力对截面形心的力矩则逆时针转向取正值，顺时针转向取负值。

虽然截面法是求剪力和弯矩的基本方法。但在总结出上述规律之后，在实际计算中就可以不再截取研究对象通过平衡方程去求剪力和弯矩了；而可以直接根据截面左侧或右侧梁上的外力来求横截面上的剪力和弯矩，这种方法较简便。

例如，运用这一方法再来求解例 4 - 1 时，如欲取截面左侧的一段梁为研究对象，只需假想用一张纸将右段梁盖上（图 4 - 10a），根据左段梁上的外力即可直接写出：

$$F_S = +F_A = 6.25\ \text{kN}$$

$$M = +F_A \times 0.8\ \text{m} = (6.25\times10^3\ \text{N})\times(0.8\ \text{m}) = 5\times10^3 \text{N}\cdot\text{m} = 5\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

如欲取右段梁为研究对象，则可假想盖住左段梁（图 4 - 10b），也可直接得出：

$$F_S = +F - F_B = 10\times10^3\text{N} - 3.75\times10^3\text{N} = 6.25\times10^3\text{N} = 6.25\text{kN}$$

$$\begin{aligned} M &= +F_B \times 3.2\ \text{m} - F\times 0.7\ \text{m} \\ &= (3.75\times10^3\ \text{N})\times(3.2\ \text{m}) - (10\times10^3\ \text{N})\times(0.7\ \text{m}) \\ &= 5\times10^3\ \text{N}\cdot\text{m} = 5\ \text{kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

可见计算过程有不少简化。

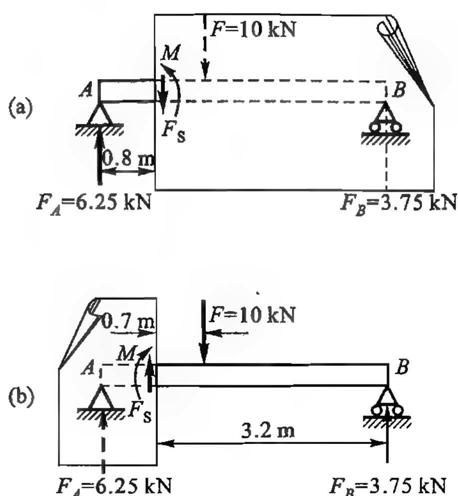


图 4 - 10

§4 - 3 剪力图和弯矩图

梁横截面上的剪力和弯矩是随截面的位置而变化的，在梁的强度和刚度计算中，常常需要知道梁各横截面上的内力随截面位置的变化情况，为了描述其变化规律，可以用坐标 x 表示横截面沿梁轴线的位置，将梁各横截面上的剪力和弯矩表示为坐标 x 的函数，即：

$$F_S = F_S(x)$$

$$M = M(x)$$

这两个函数表达式称为剪力方程和弯矩方程。

为了能一目了然地表明梁各横截面上剪力和弯矩沿梁轴线的变化情况，在

设计计算中常把各横截面上的剪力和弯矩用图形来表示。即取一平行于梁轴线的横坐标 x，表示横截面的位置，以纵坐标表示各对应横截面上的剪力和弯矩，画出剪力和弯矩与 x 的函数曲线。这样得出的图形叫做梁的**剪力图和弯矩图**。

利用剪力图和弯矩图很易于确定梁的最大剪力和最大弯矩，以及梁危险截面的位置。列剪力方程和弯矩方程，画剪力图和弯矩图是梁的强度和刚度计算中的重要环节。

画剪力图和弯矩图的基本方法是首先列出梁的剪力方程和弯矩方程，然后根据这些方程来作图，下面通过例题来说明这个方法。

例 4-2 一悬臂梁 AB（图 4-11a），右端固定，左端受集中力 F 作用。作此梁的剪力图和弯矩图。

解：

(1)列剪力方程和弯矩方程　以 A 为坐标原点，在距原点 x 处假想地将梁截开，取左段梁为研究对象，并设截面上的剪力 F_S 和弯矩 M 的方向和转向为正，如图 4-11b 所示。因在外力 F 和内力 F_S、M 的作用下，左段梁应保持平衡，故由平衡方程

$$\sum F_y = 0,\quad -F_S - F = 0$$

得

$$F_S = -F \qquad (0 < x < l) \quad \text{(a)}$$

由

$$\sum M_O = 0,\quad Fx + M = 0$$

得

$$M = -Fx \qquad (0 \leqslant x < l) \quad \text{(b)}$$

因截面的位置是任意的，故式中的 x 是一个变量。以上两式即为图 4-11a 所示梁的剪力方程和弯矩方程。

(2) 画剪力图和弯矩图　从式(a)知道，剪力 F_S 不随截面的位置而变。取直角坐标 OxF_S，可画出梁的剪力图为一水平线，如图 4-11c 所示。因剪力 F_S 为负值，故画在横坐标下面。此图表明，各横截面上的剪力相同，其绝对值均为 F。

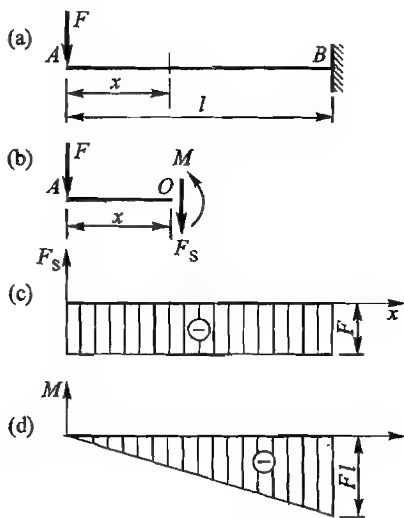


图 4-11

由式(b)知道，弯矩 M 是 x 的一次函数，故弯矩图为一倾斜直线，在 OxM 坐标中可由两点确定：在 $x=0$ 处，$M=0$；在 $x=l$ 处，$M=-Fl$。由此可作出梁的弯矩图如图 4-11d 所示。由于各横截面上的弯矩皆为负值，故画在横坐标下面。由图可见，绝对值最大的弯矩位于 B 端，其绝对值为

$$|M|_{max} = Fl$$

由于在剪力图和弯矩图中的坐标已明确规定，因此习惯上往往可以不再将坐标轴画出，在以下各例中也略去不画。

例 4-3 一简支梁 AB 受集度为 q 的均布载荷作用（图 4-12a）。作此梁的剪力图和弯矩图。

解：

（1）求支座反力　在求此梁横截面上的剪力或弯矩时，无论截取哪一边的梁为研究对象，其上的外力都不可避免地包括一个支座反力，因此须先求出梁的支座反力。

由于 q 是单位长度上的载荷，所以梁上的总载荷为 ql，又因梁左右对称，可知两个支座反力相等，由此得：

$$F_A = F_B = \frac{1}{2}ql$$

（2）列剪力方程和弯矩方程　在距 A 点 x 处截取左段梁为研究对象，其受力图如图 4-12b 所示。设横截面上的剪力和弯矩为正方向和正转向，研究对象上的均布力可合成为 qx，作用于该段梁的中点，则由平衡方程

$$\sum F_y = 0, \quad F_A - qx - F_S = 0$$

得

$$F_S = F_A - qx = \frac{ql}{2} - qx \qquad (0 < x < l) \qquad (a)$$

由

$$\sum M_O = 0, \quad -F_A x + qx \cdot \frac{x}{2} + M = 0$$

得

$$M = F_A x - qx \cdot \frac{x}{2} = \frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2 \qquad (0 \leqslant x \leqslant l) \qquad (b)$$

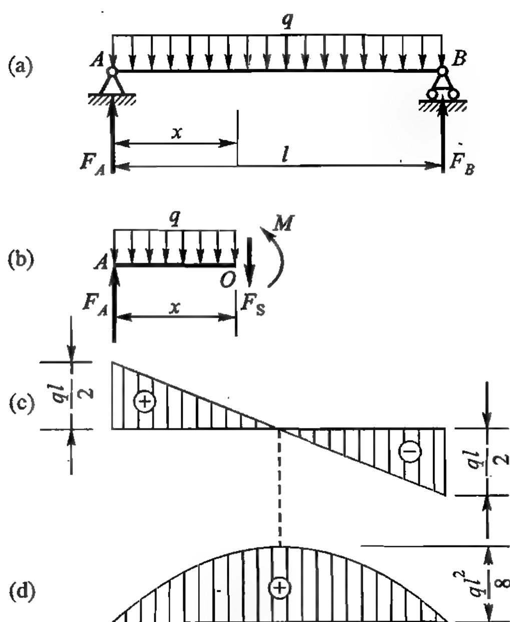


图 4-12

(3) 画剪力图和弯矩图　由式(a)可知剪力图为一直线，且在 $x=0$ 处，$F_S=\frac{1}{2}ql$，$x=l$ 处，$F_S=-\frac{1}{2}ql$。由此可画出梁的剪力图如图 4－12c 所示。由式(b)可知弯矩图为一抛物线，在 $x=0$ 和 $x=l$ 处，$M=0$；在 $x=\frac{l}{2}$ 处，$M=\frac{ql^2}{8}$。再适当确定几点后可作出弯矩图如图 4－12d所示。

由剪力图及弯矩图可见，在靠近两支座的横截面上剪力的绝对值最大，为

$$|F_S|_{max}=\frac{ql}{2}$$

在梁的中点截面上，剪力 $F_S=0$，弯矩最大，其值为：

$$M_{max}=\frac{ql^2}{8}$$

在以上两例中，都是截取一段梁为研究对象，通过平衡方程，然后列出剪力方程和弯矩方程，下面各例中再进一步简化列剪力方程和弯矩方程的步骤，采用前节中所述的直接根据截面一侧梁上的外力来列出剪力方程和弯矩方程。

例 4－4　图 4－13a 所示为一简支梁，在 C 点受集中力 F 的作用，作此梁的剪力图和弯矩图。

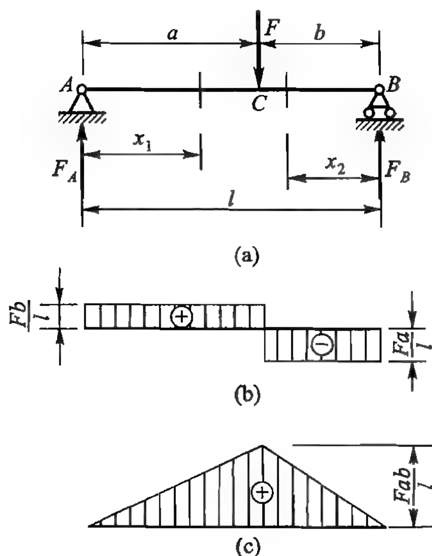


图 4－13

解：

(1)求支座反力　以整个梁为研究对象，由平衡方程 $\sum F_y=0$、$\sum M_A=0$ 可求得：

$$F_A=\frac{Fb}{l},F_B=\frac{Fa}{l}$$

(2) 列剪力方程和弯矩方程　此梁在 C 处有集中力 F 作用，故 AC 和 CB 两段梁的剪力方程和弯矩方程不同，必须分别列出。

AC 段：

在距 A 端 x_1 处取一横截面，其左侧梁上的外力只有 F_A，方向向上，由它引起的剪力为正，故剪力方程为

$$F_{S1} = +F_A = \frac{Fb}{l} \qquad (0 < x_1 < a) \quad (a)$$

F_A 对截面形心之矩为 $F_A x_1$，顺时针转向，由它引起的弯矩为正，可列出弯矩方程为

$$M_1 = +F_A x_1 = \frac{Fb}{l} x_1 \qquad (0 \leqslant x_1 \leqslant a) \quad (b)$$

CB 段：

求 CB 段内任一截面上的剪力和弯矩时，取右段梁来计算较简单。在距 B 端 x_2 处取一横截面，其右侧梁上的外力只有 F_B，得剪力方程为

$$F_{S2} = -F_B = -\frac{Fa}{l} \qquad (0 < x_2 < b) \quad (c)$$

得弯矩方程为

$$M_2 = +F_B x_2 = \frac{Fa}{l} x_2 \qquad (0 \leqslant x_2 \leqslant b) \quad (d)$$

(3) 画剪力图和弯矩图　由式(a)、式(c)知，AC 和 CB 两段梁的剪力图均为一水平线；由式(b)、式(d)知，这两段梁的弯矩图为两条倾斜直线。确定直线两端点的坐标后，可作出梁的剪力图和弯矩图如图 4－13b、c 所示。由图可见，在 $a > b$ 的情况下，在 CB 段剪力的绝对值最大，为

$$|F_S|_{max} = \frac{Fa}{l}$$

在集中力作用处的横截面上弯矩最大，其值为

$$M_{max} = \frac{Fab}{l}$$

若载荷 F 位于梁的中点，即 $a = b = \frac{l}{2}$ 时，则：

$$F_{Smax} = \frac{F}{2}$$

$$M_{max} = \frac{Fl}{4}$$

前面曾经分析过装有斜齿轮或锥齿轮的轴将受到集中力偶的作用。集中力偶是梁上载荷的又一种形式。下面讨论在集中力偶作用下梁的剪力图和弯矩图。

例 4－5　设一简支梁 AB(图 4－14a)，在 C 点处有矩为 M_e 的一集中力偶作用，作此梁的剪力图和弯矩图。

解：

(1) 求支座反力　设支座反力 F_A、F_B 皆向上，由平衡方程

$$\sum M_A = 0, \quad M_e + F_B l = 0$$

得

$$F_B = -\frac{M_e}{l}$$

由

$$\sum M_B = 0,\quad -F_A l + M_e = 0$$

得

$$F_A = \frac{M_e}{l}$$

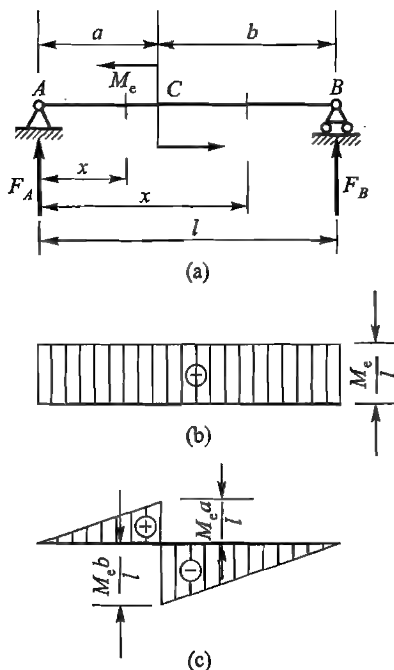


图 4－14

F_B 为负值，表示其方向与原设方向相反，F_B 指向向下。实际上 F_A 和 F_B 正好构成一个力偶与外力偶相平衡。

(2) 列剪力方程和弯矩方程　在集中力偶作用处将梁分为 AC 和 CB 两段，分别在两段内取截面，根据截面左侧梁上的外力列出梁的剪力方程和弯矩方程。

AC 段：

$$F_{S1} = F_A = \frac{M_e}{l}\quad (0 < x \leqslant a) \tag{a}$$

$$M_1 = F_A x = \frac{M_e}{l}x\quad (0 \leqslant x < a) \tag{b}$$

CB 段：

$$F_{S2} = F_A = \frac{M_e}{l}\quad (a \leqslant x < l) \tag{c}$$

$$M_2 = F_A x - M_e = \frac{M_e}{l}x - M_e\quad (a < x \leqslant l) \tag{d}$$

(3) 画剪力图和弯矩图　由式(a)、式(c)知道，AC 段和 CB 段各横截面上的剪力相同，两段的剪力图为同一水平线；由式(b)、式(d)知道，两段梁的弯矩图为倾斜直线。可作出梁的剪力图和弯矩图如图 4－14b、c 所示。由图可见，全梁各横截面上的剪力均为 $\frac{M_e}{l}$；在 $a < b$ 的情况下，绝对值最大的弯矩在 C 点稍右的截面上，其值为

$$|M|_{max} = \frac{M_e b}{l}$$

前面所举各例都同时画了剪力图和弯矩图，但在实际计算中，更多的情况是只需画出梁的弯矩图，剪力图可不必画出。

例 4－6　一简支梁 AB(图 4－15a)，在中点 C 处作用一集中力 F，在 B 端有一矩为 M_e 的集中力偶。作此梁的弯矩图。

解：

(1) 求支座反力　设 F_A、F_B 方向向上，由平衡方程 $\sum M_B = 0$ 和 $\sum M_A = 0$ 可得：

$$F_A = -\frac{M_e}{l} + \frac{F}{2}$$

$$F_B = \frac{M_e}{l} + \frac{F}{2}$$

(2) 列弯矩方程　分别在 AC、CB 两段内取截面，由截面左侧梁上的外力，可得：

AC 段：

$$M_1 = F_A x = -\frac{M_e}{l}x + \frac{F}{2}x \qquad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{2}\right) \tag{a}$$

CB 段：

$$\begin{aligned} M_2 &= F_A x - F\left(x - \frac{l}{2}\right) \\ &= -\frac{M_e}{l}x + \frac{F}{2}x - Fx + \frac{Fl}{2} \\ &= -\frac{M_e}{l}x + \frac{F}{2}(l - x) \qquad \left(\frac{l}{2} \leqslant x < l\right) \end{aligned} \tag{b}$$

(3) 画弯矩图　由式(a)、式(b)，两段梁的弯矩图为倾斜直线。确定直线端点的坐标后，作出梁的弯矩图如图 4－15b 所示。绝对值最大的弯矩可能在梁的中点或 B 端的横截面上，视 F、M_e 的具体数值而定。

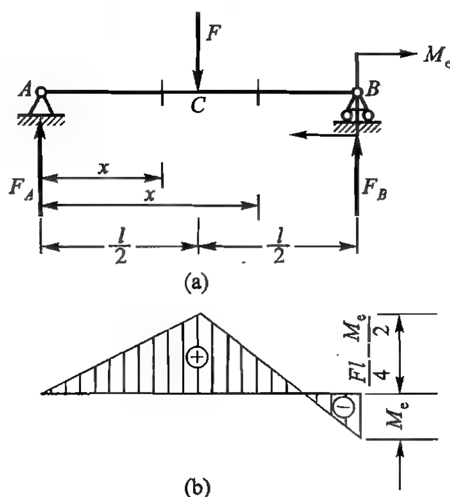


图 4－15

在例 4－6 中，梁上同时作用有集中载荷和集中力偶。由解题过程中可见，梁的支座反力和弯矩都包括有这两个载荷的作用。例如在

$$F_A = -\frac{M_e}{l} + \frac{F}{2}$$

$$M_1 = -\frac{M_e}{l}x + \frac{F}{2}x$$

两式中都包括两项，分别代表每一种载荷的作用；而且，因某一载荷引起的支座反力和弯矩，均不受另一载荷的影响。因此，可以先分别求出集中载荷和集中力偶单独作用时的支座反力或弯矩，然后相加。对于梁上同时作用几个载荷时，同样可以这样处理。分别求出各载荷单独作用下的结果，然后相加，从而得到各载

荷同时作用下的结果，这样一种方法，称为叠加法。

叠加法在材料力学和工程计算中用途很广，作内力图也可采用叠加法。即先分别作出各个载荷单独作用时梁的内力图，然后将相应的各个纵坐标进行叠加，从而得到各载荷同时作用时梁的内力图。例如在例 4－6 中，集中载荷 F 单独作用时梁的弯矩图如图 4－16b 所示；集中力偶 M_e 单独作用时梁的弯矩图如图 4－16c 所示；以图 4－16c 中的斜线为基线，将两弯矩图各对应的纵坐标叠加所得到的图 4－16d，即为两载荷同时作用时梁的弯矩图。图中重叠的部分表示正负相消，最后保留的部分表示各横截面上的弯矩值。如果对梁在各种简单载荷作用下的弯矩图比较熟悉，在很多情况下用叠加法作几种载荷作用下梁的弯矩图是很方便的。

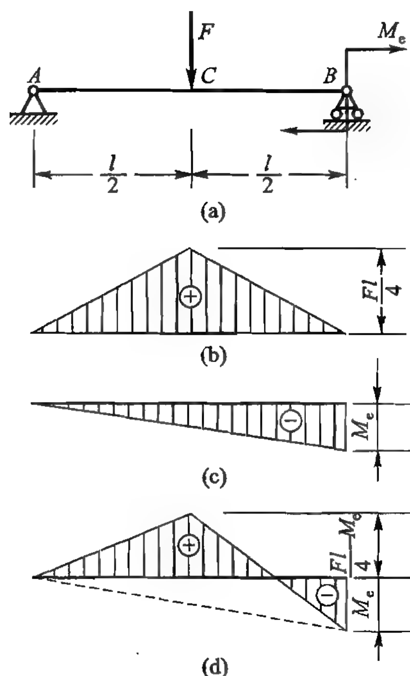


图 4－16

例 4－7 桥式吊车梁受小车轮压 F（位于梁的中点）和集度为 q 的自重作用（图 4－17a），用叠加法作其弯矩图，并求出最大弯矩。

解：作梁在集中载荷作用下的弯矩图，如图 4－17b 中的 ACB 部分；再作梁在分布载荷作用下的弯矩图，如图 4－17b 中的 ADB 部分。这两个弯矩图的纵坐标均为正值，但为便于叠加，故将其分别画在横坐标轴的上下两侧。此即在集中载荷 F 和分布载荷共同作用下梁的弯矩图。横坐标轴上下两弯矩图纵坐标之和即代表叠加后的弯矩值。由图可见，最大弯矩在梁中点的截面上，其值为

$$M_{max}=\frac{ql^2}{8}+\frac{Fl}{4}$$

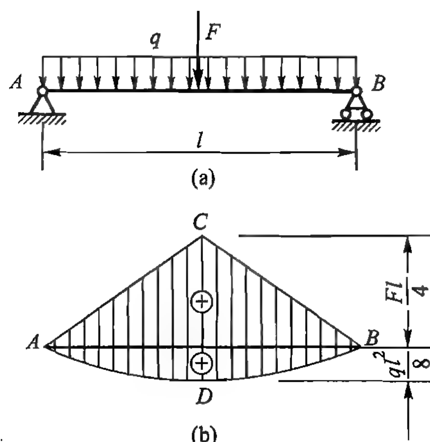


图 4－17

上述的叠加法也同样适用于作剪力图。

上述作剪力图和弯矩图的方法，也适用于刚架。所谓刚架，就是若干杆件由刚性连接而组成的结构，杆与杆之间在连接处不能有相对转动，其夹角保持不变，称为刚节点。例如图 4－18a 所示的夹具，即为一简单的刚架，其计算简图如图 4－18b 所示，变形后在刚节点 B、C 处仍保持为原来的直角。

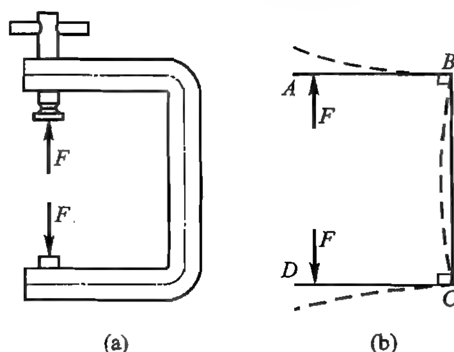


图 4－18

刚架横截面上的内力一般除剪力 F_S 和弯矩 M 外，还有轴力 F_N。在作剪力图和弯矩图时，为确定剪力和弯矩的正负号，可设想置身于刚架内侧来观察，将每一根杆视为一梁。也可将弯矩图画在杆变形后凹面的一侧，而不再考虑其正负号。下面举例说明刚架内力图的作法。

例 4－8 试作图 4－19a 所示刚架的内力图。

解：

(1)求支座反力　设各支座反力的方向如图 4－19a 所示，由平衡方程：

$$\sum F_y = 0, \qquad ql - F_{Ay} = 0$$

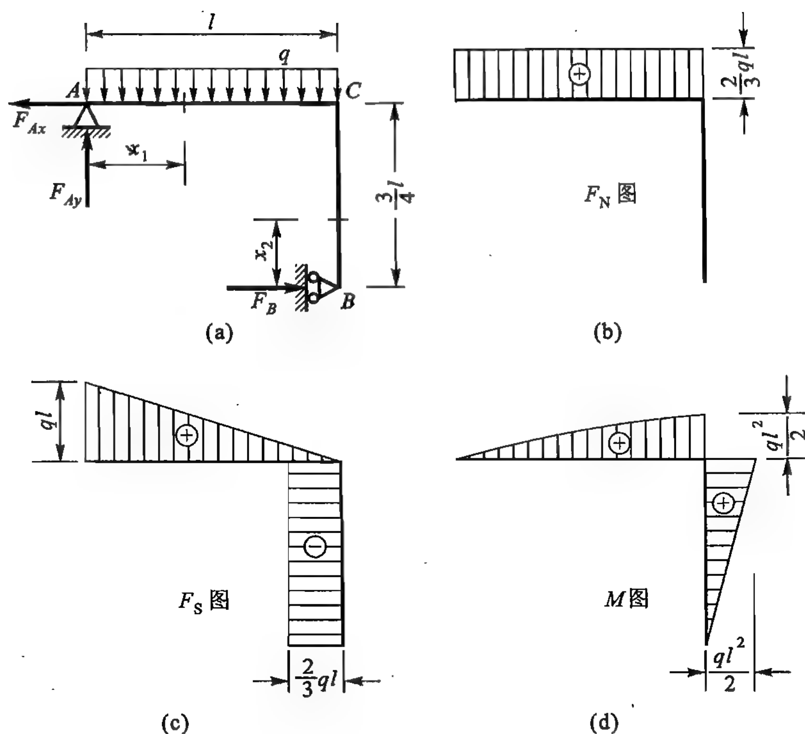


图 4－19

$$\sum M_A=0,\quad -ql\cdot\frac{l}{2}+F_B\cdot\frac{3}{4}l=0$$

$$\sum F_x=0,\quad -F_{Ax}+F_B=0$$

解得：

$$F_{Ay}=ql,\quad F_B=\frac{2}{3}ql,\quad F_{Ax}=\frac{2}{3}ql$$

各反力皆为正值，与所设方向相同。

(2)列内力方程　在二杆的连接点处将刚架分为 AC 及 BC 两段，从刚架内侧观察，分别列出两段的内力方程。

AC 段：在 x_1 处截取左侧部分为研究对象，根据其上的外力，可列出：

$$F_{N1}=F_{Ax}=\frac{2}{3}ql\qquad(0<x_1<l)$$

$$F_{S1}=F_{Ay}-qx_1=ql-qx_1\qquad(0<x_1<l)$$

$$M_1=F_{Ay}x_1-qx_1\cdot\frac{x_1}{2}=qlx_1-\frac{q}{2}x_1^2\qquad(0\leqslant x_1\leqslant l)$$

CB 段：在 x_2 处截取以下部分为研究对象，可列出：

$$F_{N2}=0$$

$$F_{S2}=-F_B=-\frac{2}{3}ql\qquad\left(0<x_2<\frac{3}{4}l\right)$$

$$M_2 = F_B x_2 = \frac{2}{3}qlx_2 \qquad \left(0 \leqslant x_2 \leqslant \frac{3}{4}l\right)$$

(3)画内力图　由上列各式知，CB 段的轴力为零，AC 段的弯矩为二次抛物线，其他各段的内力图皆为直线。可画出刚架的内力图如图 4-19b、c、d 所示。由图可见：

在 AC 段，　　$F_{\mathrm{N}\max} = \frac{2}{3}ql$

在 A 端稍右处，　　$F_{\mathrm{S}\max} = ql$

在 C 点处，　　$M_{\max} = \frac{1}{2}ql^2$

从刚架内侧看去，每一段刚架的变形情形及弯矩的正负号规定与水平梁一致。在刚架的刚节点处不受集中力偶作用时，刚节点两侧弯矩的数值及正负号均相同；当刚节点处受集中力偶作用时，刚节点两侧弯矩发生突变其突变数值等于集中力偶矩的值。本教材将弯矩图画在梁的受压侧，但在土建类的材料力学教材中将弯矩图画在梁的受拉侧。

§4-4 剪力、弯矩和分布载荷集度间的关系

在例 4-3 中，梁的剪力方程和弯矩方程分别为：

$$F_{\mathrm{S}} = \frac{ql}{2} - qx$$

$$M = \frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2$$

如果将弯矩方程对 x 求导数，得

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = \frac{ql}{2} - qx$$

其结果就是梁的剪力方程。如再将剪力方程对 x 求导数，得

$$\frac{\mathrm{d}F_{\mathrm{S}}}{\mathrm{d}x} = -q$$

其结果就是分布载荷集度。式中的负号表示载荷的方向向下。可见弯矩 M、剪力 F_{S} 和分布载荷集度 q 之间存在一定的关系，这种关系是具有普遍性的。下面给予证明。

设一直梁上作用有任意的分布载荷，其集度为 $q(x)$，它是 x 的连续函数，如图 4-20a 所示。我们规定分布载荷向上为正，向下为负，并以 A 为原点，取 x 轴向右为正。在距 A 端 x 和 $x+\mathrm{d}x$ 处沿横截面截取长为 $\mathrm{d}x$ 的微段梁来研究（图 4-20b）。设此微段梁左边截面上的剪力和弯矩分别为 F_{S} 和 M，右边截面上的剪力和弯矩分别为 $F_{\mathrm{S}}+\mathrm{d}F_{\mathrm{S}}$ 和 $M+\mathrm{d}M$；作用于此微段梁上的载荷视为均匀分布。设以上各力皆为正向，由平衡方程

$$\sum F_y = 0, \quad F_{\mathrm{S}} + q\mathrm{d}x - (F_{\mathrm{S}} + \mathrm{d}F_{\mathrm{S}}) = 0$$

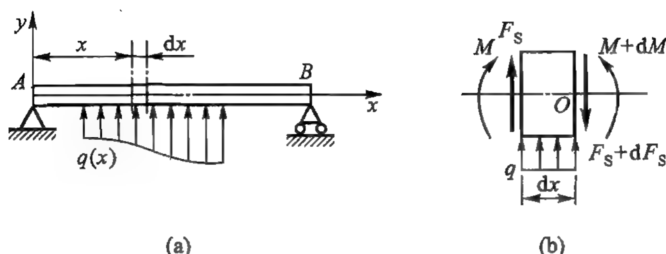


图 4－20

可得

$$\frac{dF_S}{dx}=q \tag{4-1}$$

又由平衡方程

$$\sum M_O=0,\quad -M-F_S dx-q dx\frac{dx}{2}+(M+dM)=0$$

略去二阶微量 $q\frac{(dx)^2}{2}$，整理后得

$$\frac{dM}{dx}=F_S \tag{4-2}$$

将式(4－2)代入式(4－1)，又可得

$$\frac{d^2M}{dx^2}=q \tag{4-3}$$

以上三式表示了载荷集度、剪力和弯矩之间的微分关系。

由于$\frac{dF_S}{dx}$和$\frac{dM}{dx}$分别代表剪力图和弯矩图某点处切线的斜率，所以上面的微分关系说明：剪力图中某点处的斜率等于梁上对应点处的载荷集度；弯矩图中某点处的斜率等于梁在对应截面上的剪力。

根据上述关系，并由前面各例，可以得到下列载荷、剪力图和弯矩图三者之间的关系（图 4－21）：

① 梁上某段内 $q=0$ 时，F_S 为常数，M 为 x 的一次函数。即在无载荷的一段梁上，剪力图的斜率为零，剪力图为水平直线；弯矩图的斜率为常数，弯矩图为倾斜直线。此时，若剪力 F_S 为正，则弯矩图向右上方倾斜，其斜率为正（如 AB 段）；若剪力 F_S 为负，则弯矩图向右下方倾斜，其斜率为负（如 BD 段）；若剪力 F_S 为零，则弯矩图为一水平直线，其斜率为零（如 DE 段）。

② 在梁上某段内 $q=$常数时，F_S 为 x 的一次函数，M 为 x 的二次函数。即在有均布载荷的一段梁上，剪力图的斜率为常数，剪力图为一倾斜直线；弯矩图的斜率随 x 而变化，弯矩图为一条二次抛物线（如 EH 段）。

③ 若均布载荷向下，则剪力图的斜率为负，剪力图为一条向右下方倾斜的

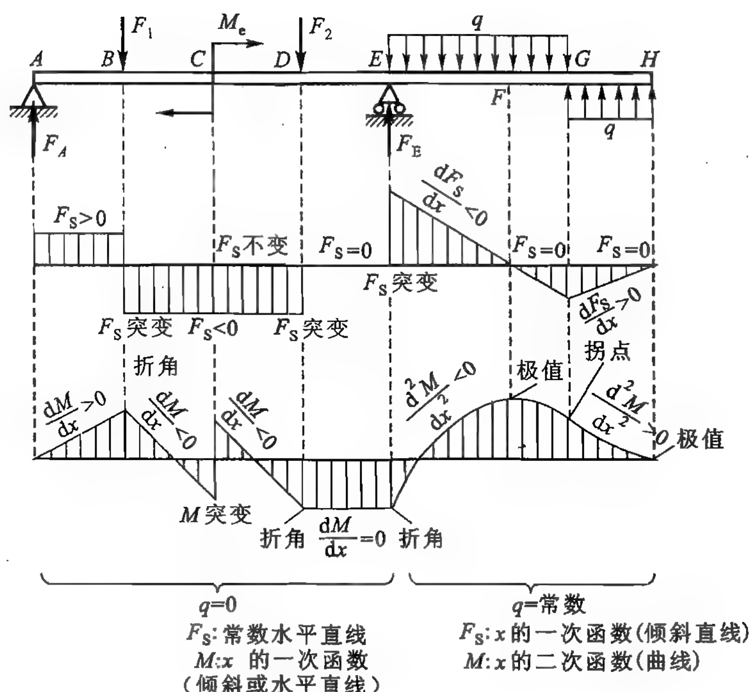


图 4-21

直线;此时弯矩图的斜率在逐渐减小,弯矩图呈凸形(如 EG 段)。反之,若均布载荷向上,则剪力图向右上方倾斜,弯矩图呈凹形(如 GH 段)。在 $F_S=0$ 处,弯矩图的斜率为零,该处的弯矩为极值(如 F、H 点)。

④ 在集中力作用处,剪力图有突变,突变之值即为该处集中力之大小。此时弯矩图的斜率也发生突变,因而弯矩图在此处有一折角(如 B、D、E 各点)。

⑤ 在集中力偶作用处,弯矩图有突变,突变之值即为该处集中力偶的力偶矩;但剪力图却无变化,因而在集中力偶作用处两侧,弯矩图的斜率相同(如 C 点)。

现将上述常见载荷下内力图的特征作一归纳,列于表 4-1。

利用这些规律,可以检查所作剪力图和弯矩图的形状是否正确。例如在例 4-3 中,由分布载荷向下可知,弯矩图应为凸形;又由剪力图知,在梁跨中点处 $F_S=0$,故弯矩图在此处必具有极值。又如在例 4-5 中,集中力偶作用处的剪力图无变化,且全梁的剪力为一常数,故 AC 和 CB 段弯矩图的斜率应相等,两段的弯矩图为相互平行的直线。其他各题均可作这样类似的检查。

在集中力(含支座反力)、集中力偶或分布载荷的起终点的两侧无限靠近作用点的截面称为**控制面**。在两个相距宏观尺寸的控制面之间,梁的内力可用同一组函数表示。

表 4-1 常见载荷作用下剪力图、弯矩图的特征

区段载荷图	横向集中力 F	集中力偶 M_0	无载荷 $q=0$	均布载荷 $q>0$	均布载荷 $q<0$
	F F	M_O			
剪力图特征	突变值 F	水平线	水平线 或 或	斜直线 或 或	斜直线 或 或
弯矩图特征	拐折 或 或 或 或	突变值 M_0	直线 或 或	二次抛物线 或 或	二次抛物线 或 或

利用这些规律，可以不必再列出梁的内力方程，而更加简捷地画出梁的内力图。其方法是：根据梁上载荷和支承情况，恰当地选择控制面，将梁分为几段，再由各段内载荷的情况初步确定剪力图和弯矩图的形状。然后求出控制面上的内力值，从而画出全梁的剪力图和弯矩图。下面举例说明。

例 4－9 外伸梁如图 4－22a 所示，试作此梁的剪力图和弯矩图。

解：

(1)求支座反力　取全梁为研究对象，由平衡方程

$$\sum M_B=0,\quad F\cdot 4a-F_A\cdot 3a+M_e+\frac{q(2a)^2}{2}=0$$

得

$$\begin{aligned}F_A&=\frac{4F}{3}+\frac{M_e}{3a}+\frac{2qa}{3}\\&=\frac{4(3\times10^3\ \text{N})}{3}+\frac{3.6\times10^3\ \text{N}\cdot\text{m}}{3\times(0.6\text{m})}+\frac{2(10\times10^3\ \text{N/m})\times(0.6\ \text{m})}{3}\\&=10\times10^3\ \text{N}=10\ \text{kN}\end{aligned}$$

由

$$\sum F_y=0,\quad -F-2qa+F_A+F_B=0$$

得

$$\begin{aligned}F_B&=F+2qa-F_A\\&=3\times10^3\ \text{N}+2(10\times10^3\ \text{N/m})\times(0.6\ \text{m})\\&=5\times10^3\ \text{N}=5\ \text{kN}\end{aligned}$$

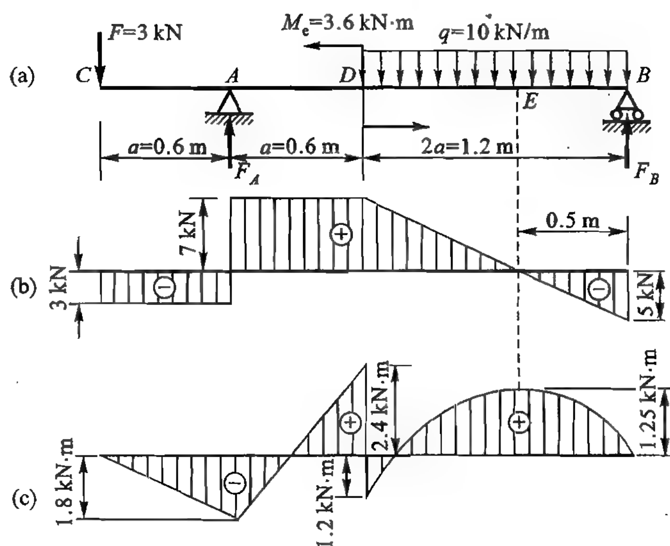


图 4－22

(2) 作剪力图

(i)初定图形　根据梁上载荷及支承情况，将梁分为 CA、AD、DB 三段。

CA、AD 段：$q=0$，F_S 图为水平直线，斜率为零。

DB 段：$q<0$，F_S 图为直线，斜率为负，向右下方倾斜。

A 处：有 F_A，F_S 图突变 F_A。

D 处：有 M_e，F_S 图无突变。

(ii)求控制面上的剪力　因 CA、AD 段的剪力图为水平线，分别确定其内任一截面上的剪力值即可。为画出 DB 段的剪力图，则需确定 D 处及 B 端稍左横截面上的剪力值。

根据各横截面一侧（左侧或右侧）梁上的所有外力，可得

$$F_{SCA}=-F=-3\ \text{kN}$$

$$F_{SAD}=F_{SD}=-F+F_A=-3\times10^3\ \text{N}+10\times10^3\ \text{N}=7\times10^3\ \text{N}=7\ \text{kN}$$

$$F_{SB左}=-F_B=-5\ \text{kN}$$

(iii)作图　将以上各值标于坐标上，分别作水平线或倾斜直线，即得全梁的剪力图如图 4－22b 所示。由图可见，在 AD 段，

$$F_{S\max}=7\ \text{kN}$$

(3)作弯矩图

(i)初定图形

CA 段：$q=0$，$F_S<0$，M 图为直线，斜率为负，向右下方倾斜。

AD 段：$q=0$，$F_S>0$，M 图为直线，斜率为正，向右上方倾斜。

DB 段：$q<0$，F_S 由正渐变至负，M 图为凸形曲线，斜率由正渐减小至负。在 $F_S=0$ 处，M 为极值。

A 处：有 F_A，F_S 图突变，M 图为一折角。

D 处：有 M_e，M 图突变 M_e。

(ii)求控制面上的弯矩　为画出各段梁的弯矩图，需求以下各横截面上的弯矩，根据截面一侧所有外力对截面形心之矩，可得

$$M_C=0$$

$$\begin{aligned}M_A&=-Fa=-(3\times10^3\text{N})\times(0.6\ \text{m})\\&=-1.8\times10^3\text{N}\cdot\text{m}=-1.8\text{kN}\cdot\text{m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_{D左}&=-F\cdot2a+F_Aa=-(3\times10^3\ \text{N})\times(2\times0.6\ \text{m})+(10\times10^3\ \text{N})\times(0.6\ \text{m})\\&=2.4\times10^3\ \text{N}\cdot\text{m}\\&=2.4\ \text{kN}\cdot\text{m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_{D右}&=F_B\cdot2a-\frac{1}{2}q(2a)^2\\&=(5\times10^3\ \text{N})\times(2\times0.6\ \text{m})-\frac{1}{2}(10\times10^3\text{N/m})\times(2\times0.6\ \text{m})^2\\&=-1.2\times10^3\ \text{N}\cdot\text{m}\\&=-1.2\ \text{kN}\cdot\text{m}\end{aligned}$$

$$M_B=0$$

根据 DB 段内剪力图的几何关系知，该段梁弯矩图的极值位置 E 至 B 端的距离为 0.5 m，此处的弯矩值为

$$
\begin{aligned}
M_E &= F_B(0.5\ \text{m}) - \frac{q}{2}(0.5\ \text{m})^2 \\
&= (5\times 10^3\ \text{N})\times(0.5\ \text{m}) - \frac{1}{2}(10\times 10^3\ \text{N/m})\times(0.5\ \text{m})^2 \\
&= 1.25\times 10^3\ \text{N}\cdot\text{m} = 1.25\ \text{kN}\cdot\text{m}
\end{aligned}
$$

(iii)作图　将 M_C、M_A、$M_{D左}$各值标于坐标上，分别以直线连接，得 CA、AD 段的弯矩图；将 $M_{D右}$、M_E、M_B 各值标于坐标上，按凸形二次曲线连接，即得 DB 段的弯矩图。全梁的弯矩图如图 4－22c 所示。由图可见 D 处左侧截面上的弯矩最大，为

$$M_{\max} = 2.4\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

在此例中，为阐明解题的方法步骤，作了一些文字说明；实际作图时，除必要的计算外，文字说明可略，按步骤直接作图即可。

小　结

1. 梁弯曲时横截面上有两种内力：剪力和弯矩。

确定横截面上剪力和弯矩的基本方法是截面法。在掌握这一方法的基础上，也可以直接利用外力确定剪力和弯矩，即：

横截面上的剪力等于此截面一侧梁上所有横向外力的代数和。

横截面上的弯矩等于此截面一侧梁上所有外力对该截面形心之力矩的代数和。

2. 本章介绍了三种作内力图的方法：

(1) 按照剪力方程和弯矩方程作剪力图和弯矩图，它是最基本的方法（参见例 4－2 至例 4－5）。

(2) 叠加法　它适用于简单静定梁受几种简单载荷作用的情况（参见例 4－7）。

(3) 按照载荷集度 q、剪力 F_S 和弯矩 M 三者之间的微分关系：

$$\frac{dF_S}{dx} = q,\quad \frac{dM}{dx} = F_S,\quad \frac{d^2M}{dx^2} = q$$

以及载荷图与内力图的特征（表 4－1）作内力图，是较简捷的方法（参见例 4－9）。

3. 作内力图的步骤：

(1) 外力分析　列平衡方程，求支座反力，并校核计算结果。对于悬臂梁，可不必计算支座反力。

(2) 恰当地选择控制面，取梁的端点及载荷分布突变点作为分段点。

(3) 通常，选取梁的左端为坐标原点，取 x 轴正向向右，列出各段梁的剪力方程和弯矩方程。如果只要求作内力图，也可不必列出剪力方程和弯矩方程。

(4) 选择适当方法，作内力图。

(5) 确定剪力和弯矩的最大值及其所在截面。

思考题

4－1 在材料力学中内力的正负号规定与静力学中力及力矩的正负号规定有何区别？在图4－23a中截取左段梁为研究对象时，设横截面上剪力方向和弯矩转向如图4－23b所示，试问：

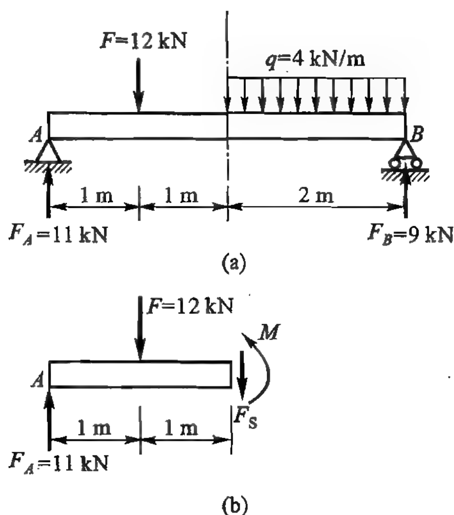


图4－23

(1) 现设的 F_S 和 M 的正负号是什么？

(2) 为求 F_S、M 值，在列平衡方程 $\sum F_y=0$、$\sum M_O=0$ 时，F_S 和 M 分别用什么正负号？

(3) 由平衡方程解得 $F_S=-1$ kN，$M=+10$ kN · m，结果中的正负号说明什么？

(4) F_S、M 的实际方向和转向应该怎样？按内力正负号规定，其正负号是什么？

(5) 如所设的 F_S、M 与图4－23b所示的相反，试再将上述问题考虑一遍。

(6) 本题中截取左段梁为研究对象时，横截面上的剪力和弯矩与左段梁上的 F_A 和 F 有关。这是否说明，与右段梁上的 q 和 F_B 无关？

4－2 在集中力作用处，梁的剪力图和弯矩图各有什么特点？在集中力偶作用处，梁的剪力图和弯矩图各有什么特点？

4－3 图4－24中梁 AC 段各截面的弯矩 M 的正负号为______。

4－4 “采用不同的坐标原点及 x 轴正向，梁上某指定截面的剪力 F_S 和弯矩 M 的数值及正负号也将随 x 而变化”是否正确？

4－5 悬臂梁所受载荷如图4－25所示，A 为坐标原点，$F=qa$，$M_e=qa^2$，下列选项中，哪一个是错误的？

A. $|F_S|_{max}=3qa$

B. 在 $3a<x\leqslant 4a$，$F_S=0$

C. $|M|_{\max}=6qa^2$

D. 在 $x=2a$ 处，$M=0$

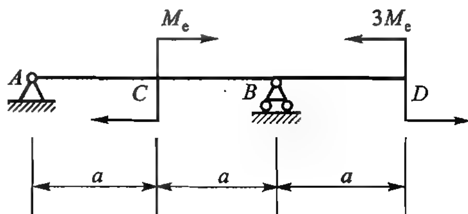


图 4－24

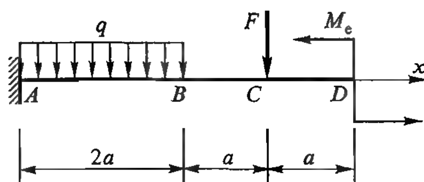


图 4－25

4－6 外伸梁在 C 点受集中力偶作用如图 4－26 所示，下列选项中哪些是错误的？

A. 剪力图为矩形

B. 剪力图为三角形

C. 当 C 点在 B 的右侧时，各截面弯矩 $M(x)\geq 0$

D. 当 C 点在梁上移动时，剪力图不变

E. 当 C 点在梁上移动时，弯矩图不变

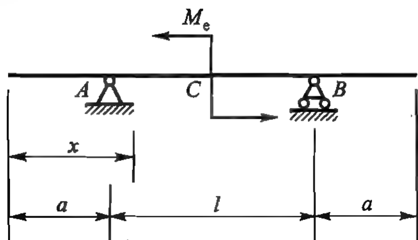


图 4－26

4－7 弯矩、剪力与分布载荷集度三者之间的微分关系是如何建立的？其物理意义和几何意义是什么？建立微分关系时分布载荷集度与坐标轴的取向有什么联系？图 4－27 所示的几种情形所推出的微分关系中的正负号是否相同？为什么？

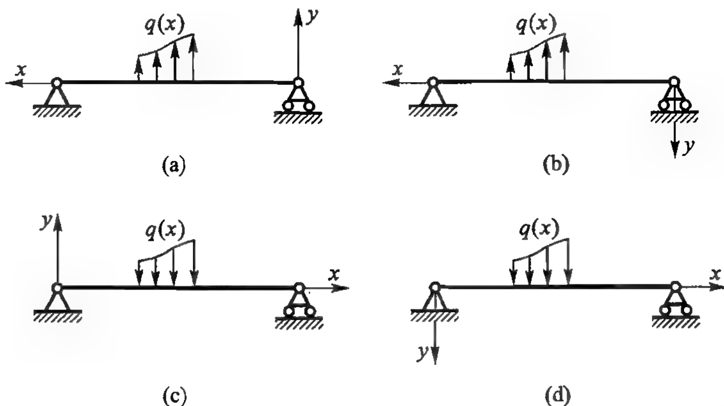


图 4－27

4-8 按照 q、F_S、M 的微分关系，直观判断图 4-28 中各图所示的 F_S、M 图有哪些错误，并予以更正。

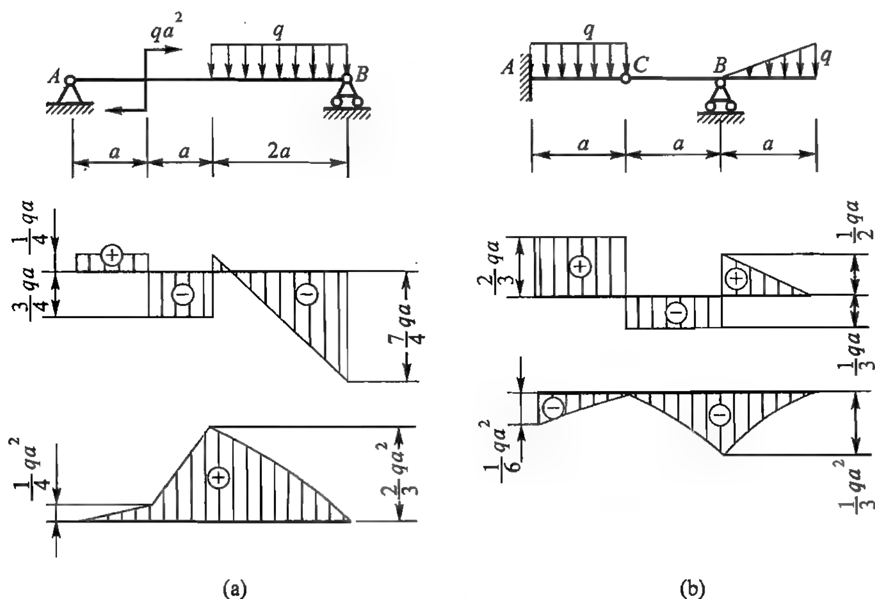


图 4-28

4-9 已知梁上没有集中力偶的作用，其剪力图如图 4-29 所示，试作弯矩图及载荷图。

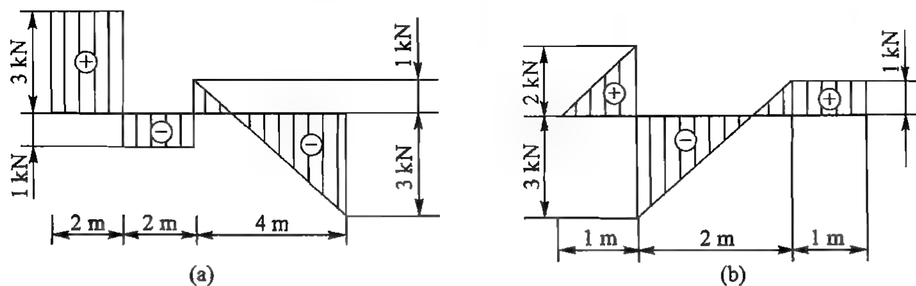


图 4-29

4-10 已知梁的弯矩图如图 4-30 所示，试作梁的载荷图和剪力图。

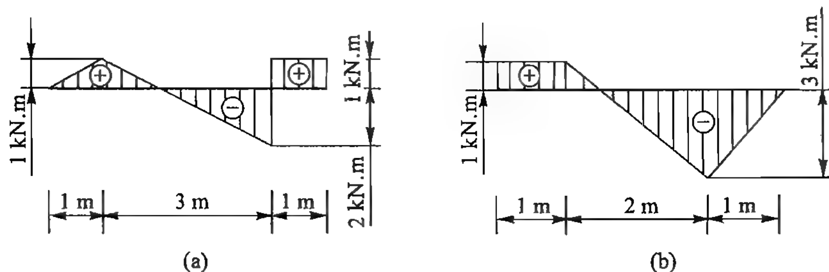


图 4-30

4-11 作简支梁在图 4-31 所示三种载荷情况下的剪力图和弯矩图,并加以比较。

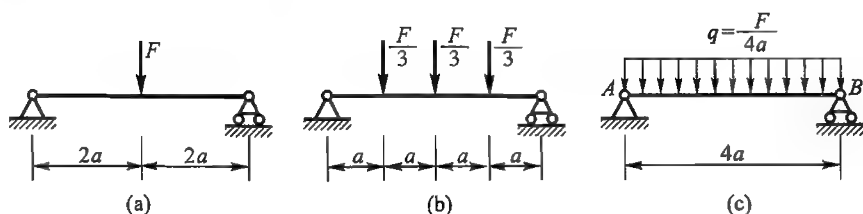


图 4-31

4-12 试从图 4-32 所示诸梁的载荷特点,回答下列问题。

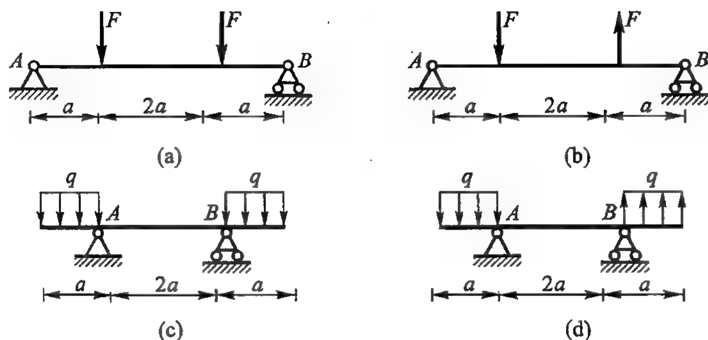


图 4-32

(1) 若结构对称,载荷也对称,在 F_S、M 图上各有什么特点?

(2) 若结构对称,载荷反对称,在 F_S、M 图上又各有什么特点?

(3) 在以上两种情况下,对称面上的 F_S 和 M 值是否等于零?

***4-13** 刚架中对任意截面的内力分析和计算,与梁有何异同?试判断图 4-33 所示两刚架在 A、B、C、D 和 E 等截面上的弯矩转向和剪力的正负。

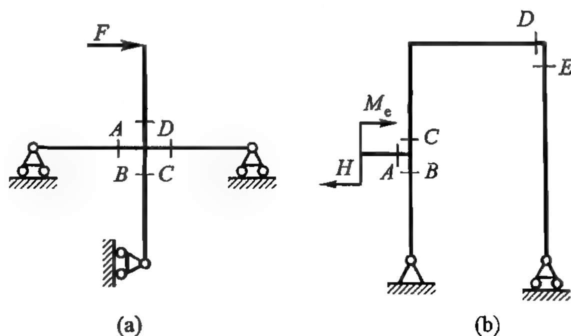


图 4-33

4-14 试判断图 4-34 所示梁的剪力图及弯矩图是否正确？如果有错误应予以更正。带中间铰的梁，其中间铰处内力有何特点？

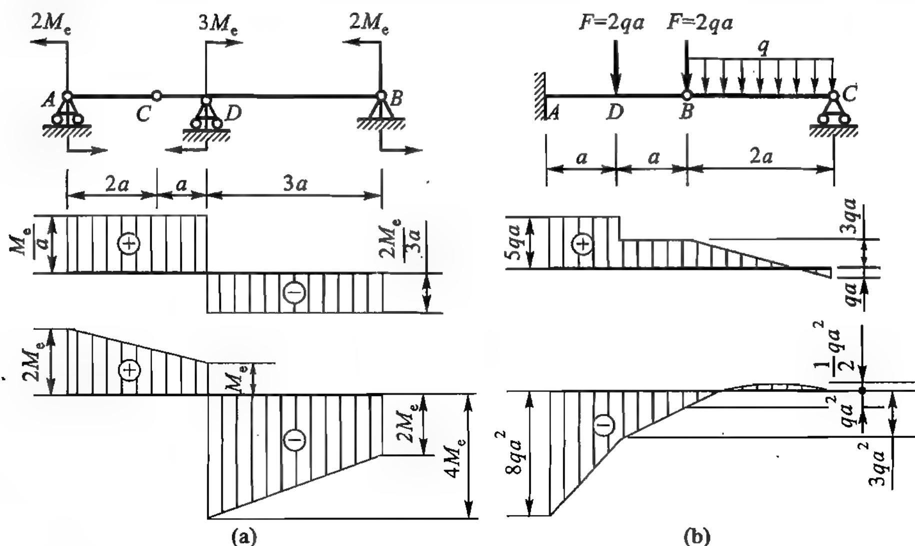
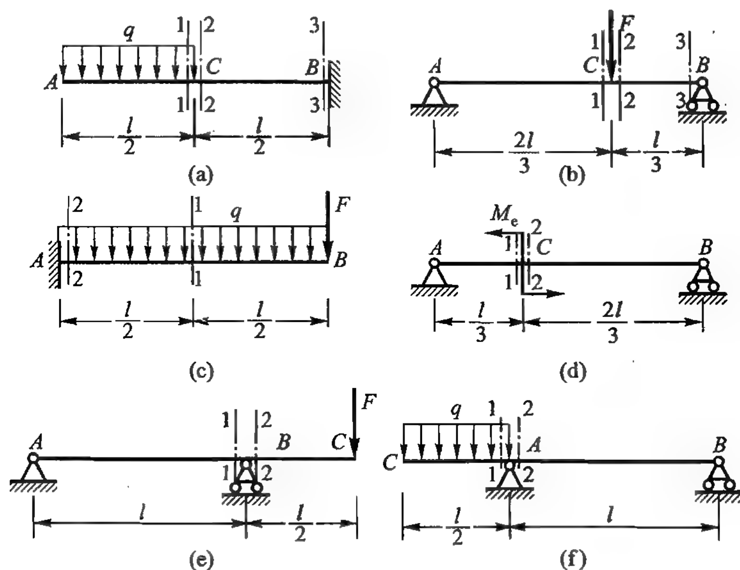


图 4-34

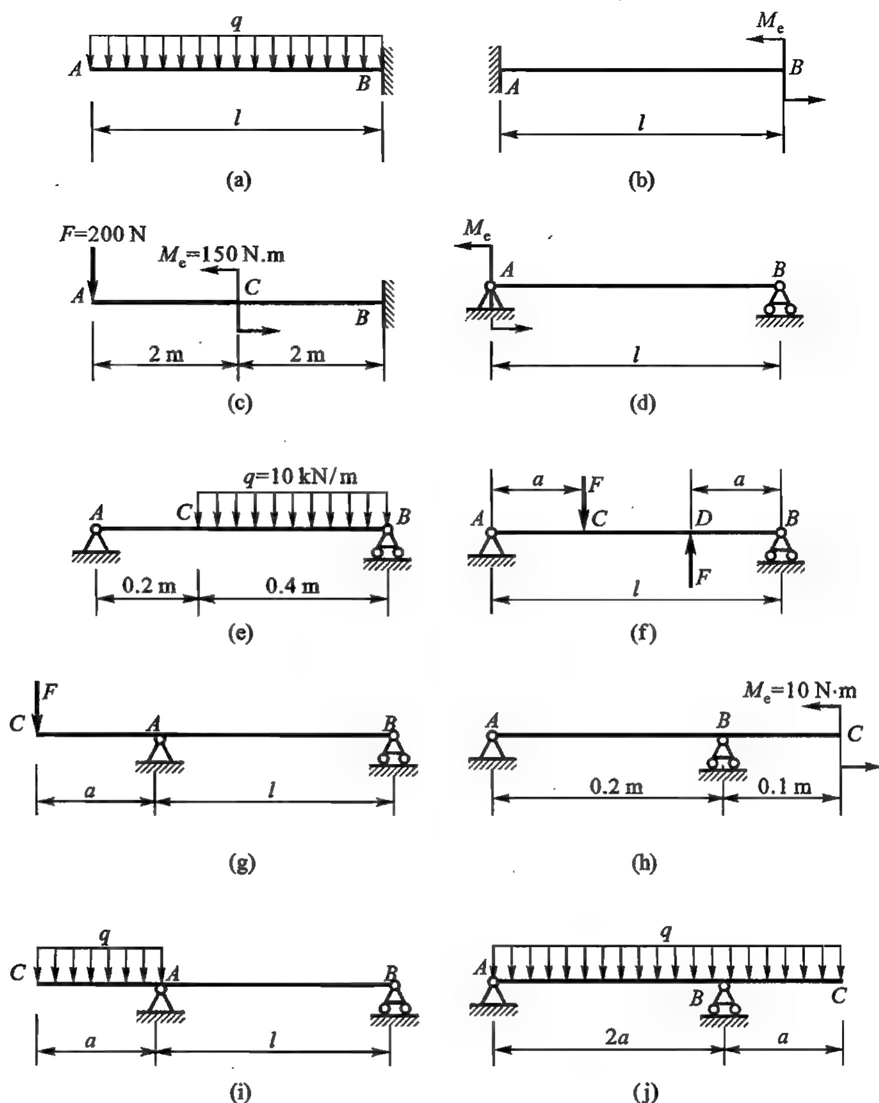
习 题

4-1 试求下列各梁指定截面上的剪力 F_S 和弯矩 M。各截面无限趋近于梁上 A、B、C 等各点。



题 4-1 图

4-2 试列出下列各梁的剪力方程和弯矩方程，作剪力图和弯矩图，并求 $|F_S|_{max}$ 和 $|M|_{max}$。



题4-2图

4-3 试用叠加法作以下各梁的弯矩图。并求出 $|M|_{max}$。

4-4 试用剪力、弯矩和分布载荷集度间的微分关系校核前面已画的剪力图和弯矩图是否正确。

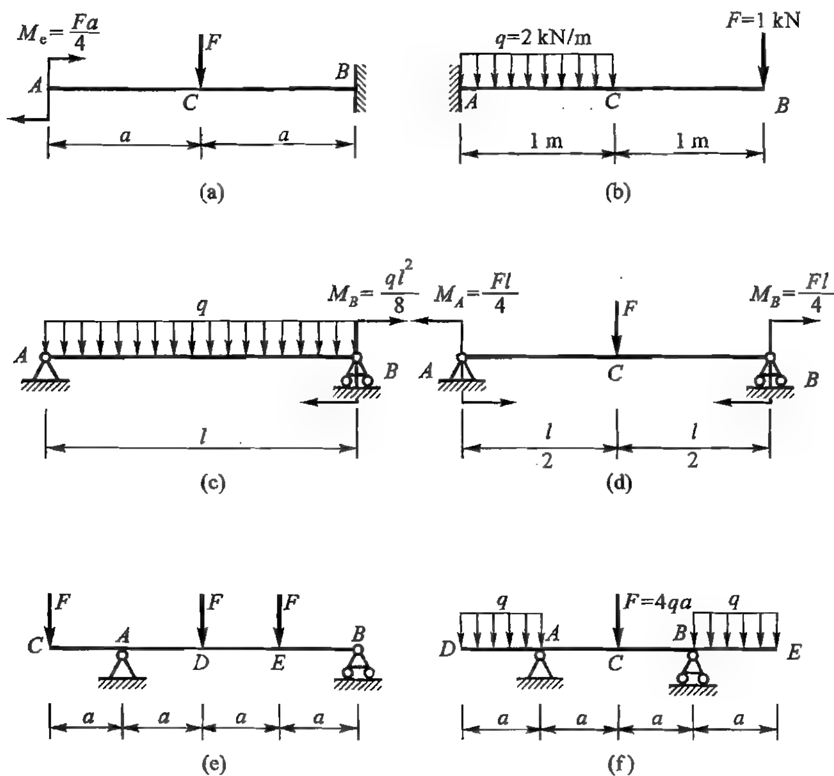
4-5 不列剪力方程和弯矩方程，试作以下各梁的剪力图和弯矩图，并求出 $|F_S|_{max}$ 和 $|M|_{max}$。

4-6 试用适当的方法作下列各梁的剪力图和弯矩图。

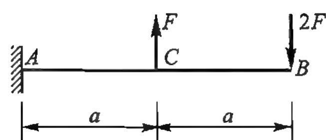
4－7 试根据载荷、剪力图和弯矩图之间的关系，检查下列各梁的剪力图和弯矩图是否正确，并对错误之处加以改正。

***4－8** 试作下列简单刚架的内力图。

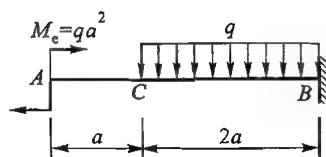
***4－9** 在梁上行走的小车二轮的轮压均为 F，如图所示。问小车行至何位置时梁内的弯矩最大？最大弯矩值为多少？设小车的轮距为 c，大梁的跨度为 l。



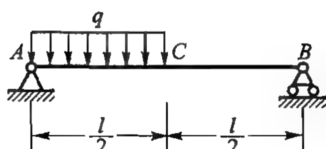
题 4－3 图



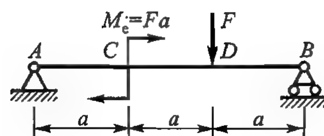
(a)



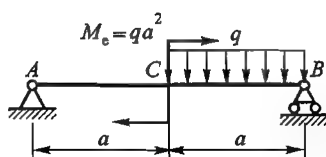
(b)



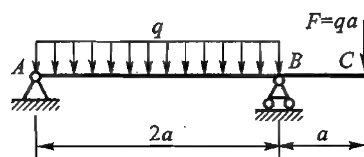
(c)



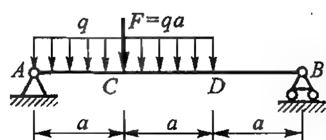
(d)



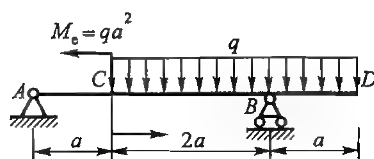
(e)



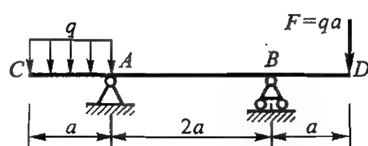
(f)



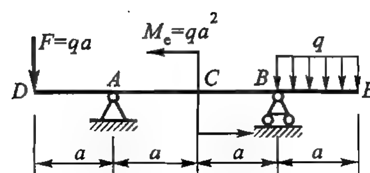
(g)



(h)

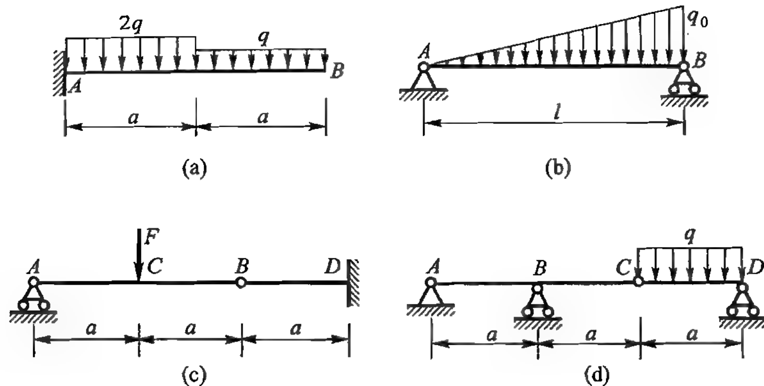


(i)

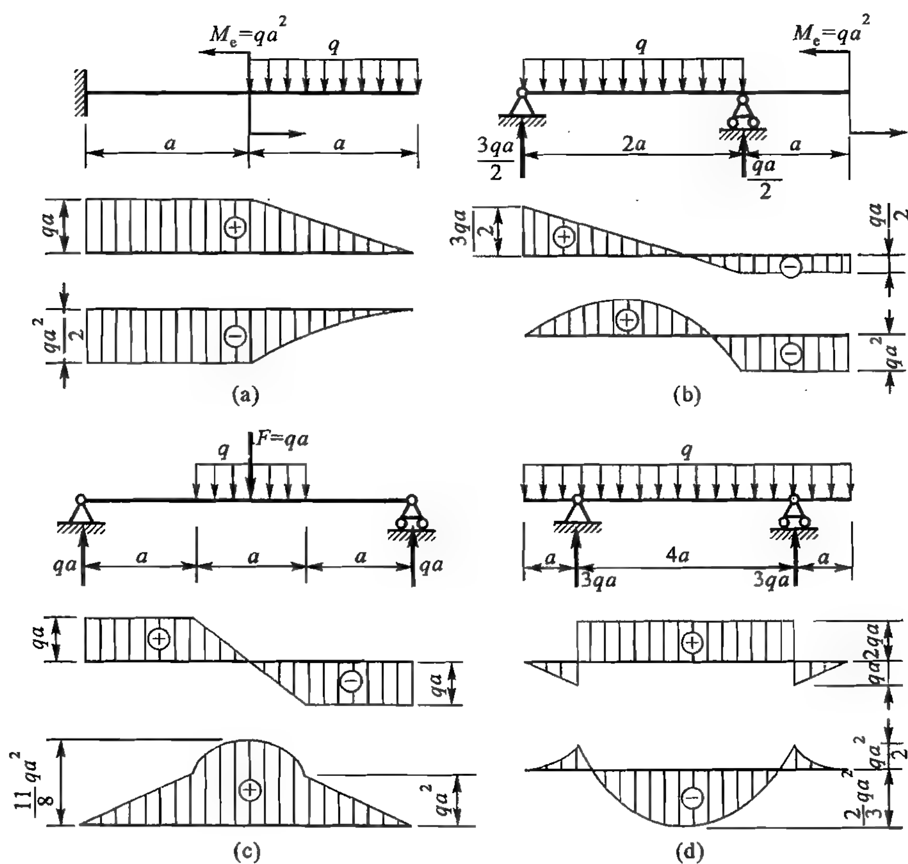


(j)

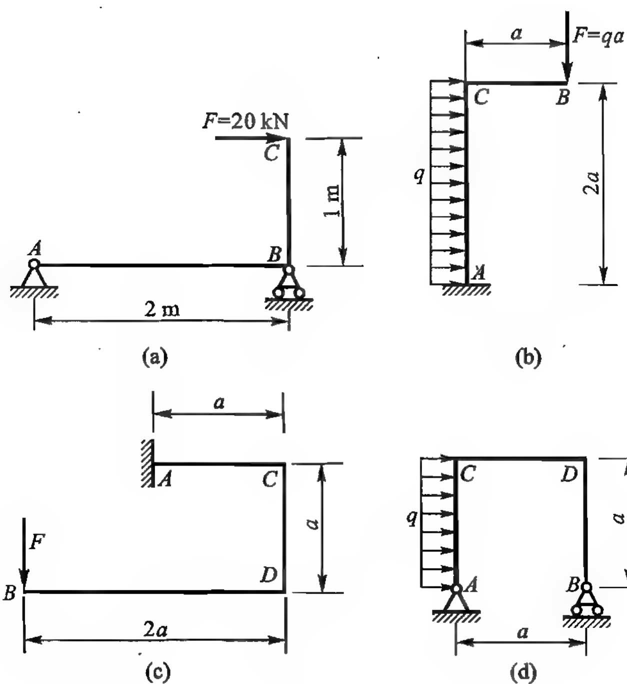
题 4－5 图


2q
q
A
B
a
a
(a)
q0
A
B
l
(b)
F
A
C
B
D
a
a
a
(c)
q
A
B
C
D
a
a
a
(d)

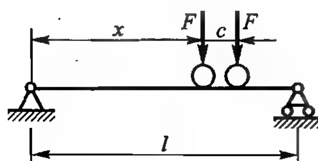
题 4－6 图


Me=qa2
q
a
a
(a)
q
Me=qa2
3qa/2
2a
a
qa/2
(b)
q
F=qa
qa
a
a
a
qa
(c)
q
a
4a
a
3qa
3qa
(d)

题 4－7 图



题 4－8 图



题 4－9 图

第五章　弯曲应力

§5－1　梁弯曲时的正应力

一般情况下，梁受外力而弯曲时，横截面上同时作用有弯矩和剪力。前者由分布于横截面上的法向内力元素 $\sigma \mathrm{d}A$ 所组成（图 5－1a）；后者则只能由切向内力元素 $\tau \mathrm{d}A$ 组成（图 5－1b）。故梁横截面上将同时存在正应力 σ 和切应力 τ。但当梁比较细长时，正应力往往是支配梁强度计算的主要因素。本节首先研究对称弯曲时梁横截面上的正应力。

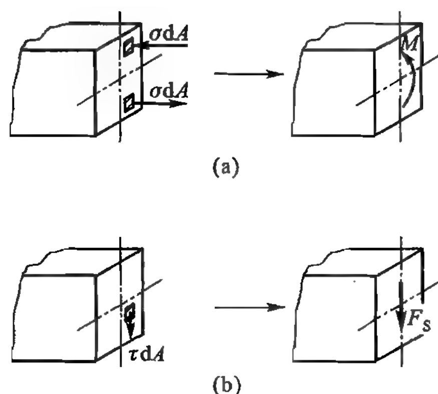


图 5－1

设一简支梁如图 5－2a 所示，其上作用有对称于梁中点的集中力 F，梁的剪力图和弯矩图分别示于图 5－2b、c。由图可见，在靠近支座的 AC、DB 两段梁内，横截面上同时存在弯矩 M 和剪力 F_S，这种弯曲称为**横力弯曲**或**剪切弯曲**；在中段 CD 内的各横截面上，剪力 F_S 为零而弯矩 M 为常量，这种弯曲称为**纯弯曲**。梁在纯弯曲时，横截面上无切应力作用。为分析正应力 σ 与弯矩 M 的关系，可以取纯弯曲的一段梁来研究。

研究梁横截面上正应力的方法，与轴向拉压和圆轴扭转时应力公式的推导一样，也需考虑变形几何关系、物理关系和静力学关系三个方面。

1. 变形几何关系

为寻求梁纯弯曲时的变形规律,可通过试验观察弯曲变形的现象。取一具有对称截面的梁,例如矩形截面梁,在其中段的侧面上,画两条垂直于梁轴线的横线 mm 和 nn,再在二横线间靠近下、上边缘处画两条纵线 ab 和 cd(图 5 - 3a)。然后按图 5 - 2a 所示的方式加载,使梁的中段处于纯弯曲状态。此时可以看到,梁变形后二纵线弯曲成弧线 $\overset{\frown}{ab}$ 和 $\overset{\frown}{cd}$;二横线 mm 和 nn 则仍然保持为一直线,且仍与弧线 $\overset{\frown}{ab}$ 和 $\overset{\frown}{cd}$ 正交,只是相对地转了一个角度(图 5 - 3b)。根据梁表面的这些现象,可以设想梁内部的变形也与此相同,因而可作这样的假设:梁弯曲变形后,其横截面仍然保持为一平面,并仍与变形后梁的轴线垂直,只是转了一个角度。这个假设称为**平面假设**。此假设之所以成立,是因为据此假设而导出的结论,为试验及进一步的理论分析所证实。

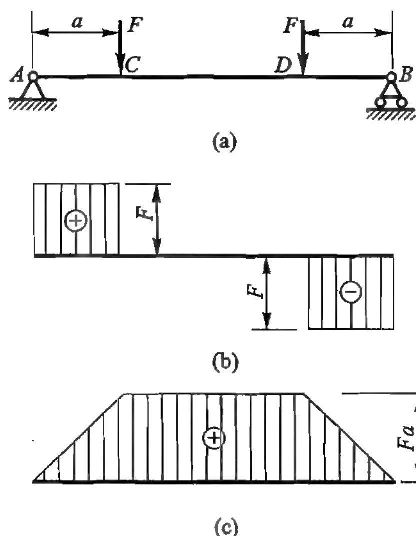


图 5 - 2

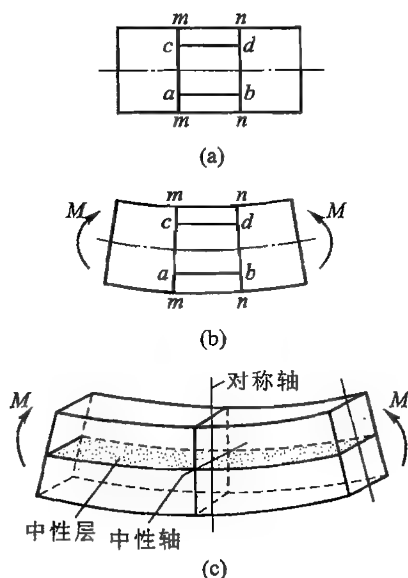


图 5 - 3

根据平面假设,梁弯曲时两相近的横截面将作相对的转动。可以设想,梁由一束纵向纤维所组成,这时在两横截面间的纵向纤维将产生伸长或缩短。靠近凸边的纤维 ab 伸长,靠近凹边的纤维 cd 缩短。如图 5 - 3b 所示。由于变形的连续性,各层纤维的变形是由伸长逐渐过渡到缩短的,其间必然存在一层既不伸长也不缩短的纤维,这一层纤维称为**中性层**;中性层与横截面的交线称为**中性轴**,如图 5 - 3c 所示。对于具有对称截面的梁,在对称弯曲的情况下,由于载荷及梁的变形都对称于纵向对称面,因而中性轴必与截面的对称轴垂直。

下面再根据平面假设，通过几何关系，找出纵向线应变沿梁高度方向变化的规律。

取长为 dx 的微段梁来分析，其变形后的情况如图 5－4 所示。取横截面的对称轴为 y 轴，并取 z 轴与截面的中性轴重合，至于中性轴的确切位置，暂未确定。现研究距中性层 y 处纵向纤维 ab 的变形。

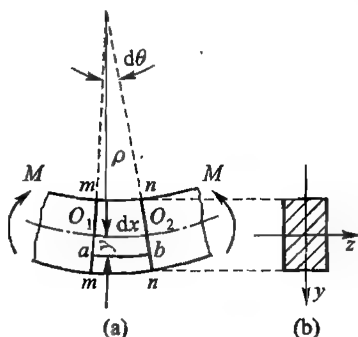


图 5－4

由平面假设，设梁变形后该微段梁两端相对地旋转了一个角度 $d\theta$，中性层 $\widehat{O_1O_2}$ 的曲率半径为 ρ，因中性层在梁弯曲后的长度不变，所以

$$\widehat{O_1O_2} = \rho d\theta = dx$$

又坐标为 y 的纵向纤维 ab 变形前的长度为

$$\overrightarrow{ab} = dx = \rho d\theta$$

变形后为

$$\widehat{ab} = (\rho + y)d\theta$$

故其纵向线应变为

$$\varepsilon = \frac{\widehat{ab} - \overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{ab}} = \frac{(\rho + y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho} \qquad (a)$$

在所取定的横截面处，式中的 ρ 为常量，故此式表明纵向纤维的线应变 ε 与纤维的坐标 y 成正比。

2. 应力、应变关系

设各纵向纤维之间互不挤压，每根纤维都只受到单向的拉力或压力，则在应力不超过材料的比例极限时，各纤维上的正应力与线应变的关系应服从胡克定律

$$\sigma = E\varepsilon$$

将式(a)代入，可得

$$\sigma = E\frac{y}{\rho} \qquad (b)$$

这就是梁横截面上正应力分布规律的表达式。此式表明，在取定的横截面处，作用于任意纵向纤维上的正应力 σ 与该纤维的坐标 y 成正比，即横截面上的正应力沿截面高度按直线规律变化，如图 5－5 所示。

3. 静力学关系

上面所得到的式(b)只说明了正应力的分布规律，还不能用于正应力的计算，因为中性轴的位置尚未确定，曲率 $\frac{1}{\rho}$ 也还未知。这须考虑横截面上正应力应满足的静力学关系才能解决。

自纯弯曲的梁中截取一个横截面来分析，如图 5－6 所示，作用于微面积 dA

上的法向内力元素为 $\sigma \mathrm{d}A$。截面上各处的法向内力元素构成了一个空间平行力系，它可能组成三个内力：平行于 x 轴的轴力 F_N，对 y 轴和 z 轴的力偶矩 M_y 和 M_z。然而此时梁横截面上的内力仅有一个位于 xy 平面内的弯矩 M，即仅有力偶矩 M_z，而轴力 F_N 和力偶矩 M_y 皆为零。因此，横截面上的应力应满足下列三个静力学关系：

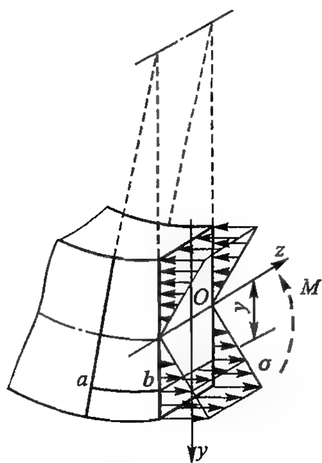


图 5－5

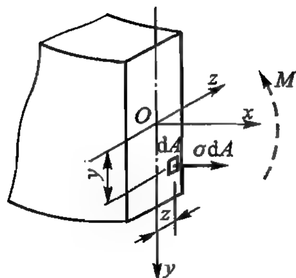


图 5－6

$$F_N = \int_A \sigma \mathrm{d}A = 0 \qquad \text{(c)}$$

$$M_y = \int_A z\sigma \mathrm{d}A = 0 \qquad \text{(d)}$$

$$M_z = \int_A y\sigma \mathrm{d}A = M \qquad \text{(e)}$$

下面讨论由此三式而得到的结论。

① 以式(b)代入式(c)，得

$$\int E\frac{y}{\rho}\mathrm{d}A = \frac{E}{\rho}\int_A y\mathrm{d}A = 0$$

式中 $\int_A y\mathrm{d}A = y_C \cdot A = S_z$，为截面图形对 z 轴的静矩，静矩是一个与 z 轴有关的几何量，它是代数值，单位为 m^3 或 mm^3。由于 $\frac{E}{\rho}$ 不可能为零，为满足上式，必须 $S_z = y_C \cdot A = 0$，显然，式中的横截面面积 $A \neq 0$，故必截面形心的坐标 $y_C = 0$。这说明，中性轴必然通过横截面的形心。这样，就确定了中性轴的位置。

② 以式(b)代入式(d)，得

$$\int_A z\left(E\frac{y}{\rho}\right)\mathrm{d}A = \frac{E}{\rho}\int_A yz\mathrm{d}A = 0$$

这是保证梁为对称弯曲的条件。式中的积分 $\int_A yz\mathrm{d}A$ 称为横截面对 y、z 轴的惯性积，通常以字符 I_{yz} 表示。惯性积是一个对相互垂直的某一对坐标轴定义的几何量，它是代数值，单位为 m^4 或 mm^4。只要截面图形对称于 y、z 中的任一轴，其值必为零。例如，若图形对称于 y 轴，则总可在 y 轴两侧的对称位置处取两个微面积 $\mathrm{d}A$，其坐标 z 数值相等而正负号相反，坐标 y 相同(图 5－7)，因而积分的结果必然为零。由于前已设定横截面的对称轴为 y 轴，故上式自然满足。

③ 以式(b)代入式(e)，得

$$\int_A y\left(E\frac{y}{\rho}\right)\mathrm{d}A = \frac{E}{\rho}\int_A y^2\mathrm{d}A = M$$

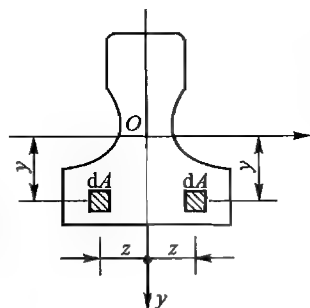


图 5－7

式中的积分 $\int_A y^2\mathrm{d}A$ 称为横截面对 z 轴的惯性矩，是一个仅与横截面的形状及尺寸有关的几何量，代表横截面的一个几何性质，单位为 m^4 或 mm^4。现令

$$I_z = \int_A y^2\mathrm{d}A \qquad (5-1)$$

则上式又可表为

$$\frac{EI_z}{\rho} = M$$

由此得梁弯曲时中性层的曲率为

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z} \qquad (5-2)$$

此式为弯曲变形的基本公式。它表明，在指定的横截面处，中性层的曲率 $\frac{1}{\rho}$ 与该截面上的弯矩 M 成正比，与 EI_z 成反比。在同样的弯矩作用下，EI_z 愈大，则曲率愈小，即梁愈不易变形，故 EI_z 称为梁的抗弯刚度。

再将式(5－2)代入式(b)，最后得到

$$\sigma = \frac{My}{I_z} \qquad (5-3)$$

式中：σ——横截面上任一点处的正应力；

M——横截面上的弯矩；

y——横截面上任一点的纵坐标；

I_z——横截面对中性轴 z 的惯性矩。

式(5－3)即为纯弯曲时梁横截上任一点处正应力的计算公式。此式表明，横截面上的正应力 σ 与该截面上的弯矩 M 成正比，与横截面的惯性矩 I_z 成反比，正应力沿截面高度方向呈线性分布。在中性轴上，各点处的正应力为零；在中性轴的下上两侧，一侧受拉，另一侧受压；离中性轴愈远处的正应力愈大(图

5－5)。

应用式(5－3)时，M 和 y 应以代数值代入，并以所得结果的正负来辨别应力的拉压。但在实际计算中，可以只用 M 和 y 的绝对值来计算正应力 σ 的数值，再根据梁的变形情况直接判断 σ 是拉应力还是压应力。即以中性轴为界，梁变形后靠凸边的一侧受拉应力，靠凹边的一侧受压应力。也可根据弯矩的正负来判断，当弯矩为正时，中性轴以下部分受拉，以上部分受压；弯矩为负时，则反之。

最后，根据弯曲正应力公式的推导过程，讨论一下式(5－3)的使用条件和范围。

① 式(5－3)是以矩形截面梁为例来推导的，但对于具有纵向对称面的其他截面形式的梁，包括不对称于中性轴的截面(例如T字形截面)的梁，仍然可以使用。因为这并不影响公式推导的条件。

② 式(5－3)是在纯弯曲条件下推导出来的。在非纯弯曲的情况下，由于横截面上还有切应力作用，此时截面将发生翘曲，不再为一平面。但由较精确的分析证明，对于跨长与截面高之比$\frac{l}{h}>5$的梁，按式(5－3)计算结果的误差很小。例如受均布载荷的矩形截面简支梁，当$\frac{l}{h}=5$时，误差仅为1%。在工程实际中常用的梁，其$\frac{l}{h}$远大于5，因此，式(5－3)可以足够精确地推广应用于剪切弯曲的情况。

③ 式(5－3)是在对称弯曲情况下推导出来的，它不适用于非对称弯曲的情况。例如图5－8所示的梁，外力不在梁的纵向对称面内，这时梁弯曲后的轴线，已不再位于外力所在的平面内，这种情况的弯曲称为斜弯曲。这时式(5－3)就不能再直接使用了。

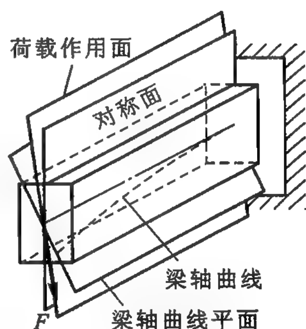


图5－8

④ 在推导式(5－3)的过程中，使用了胡克定律，因此，当梁的材料不服从胡克定律或正应力超过了材料的比例极限时，此式则不再适用。

⑤ 式(5－3)只适用于直梁，而不适用于曲梁；但可近似地用于曲率半径较梁高大得多的曲梁。对变截面梁也可近似地应用。

例5－1 图5－9a所示为一受均布载荷的悬臂梁，已知梁的跨长 $l=1$ m，均布载荷集度 $q=6$ kN/m；梁由10槽钢制成，截面有关尺寸如图所示，自型钢表查得，横截面的惯性矩 $I_z=25.6\times10^4$ mm^4。试求此梁的最大拉应力和最大压应力。

解：

(1) 作弯矩图，求最大弯矩　梁的弯矩图如图 5－9b 所示，由图知梁在固定端横截面上的弯矩最大，其值为

$$|M|_{\max}=\frac{ql^2}{2}=\frac{1}{2}(6\times10^3\ \text{N/m})\times(1\ \text{m})^2=3\ 000\ \text{N}\cdot\text{m}$$

(2) 求最大应力　因危险截面上的弯矩为负，故截面上缘受最大拉应力，由式(5－3)得

$$\sigma_{\text{t,max}}=\frac{M_{\max}}{I_z}\cdot y_1=\left(\frac{3\ 000\ \text{N}\cdot\text{m}}{25.6\times10^{-8}\text{m}^4}\right)\times(0.015\ 2\ \text{m})=178\times10^6\ \text{Pa}=178\ \text{MPa}$$

在截面的下端受最大压应力，其值为

$$\sigma_{\text{c,max}}=\frac{M_{\max}}{I_z}\cdot y_2=\left(\frac{3\ 000\ \text{N}\cdot\text{m}}{25.6\times10^{-8}\text{m}^4}\right)\times(0.032\ 8\ \text{m})=385\times10^6\ \text{Pa}=385\ \text{MPa}$$

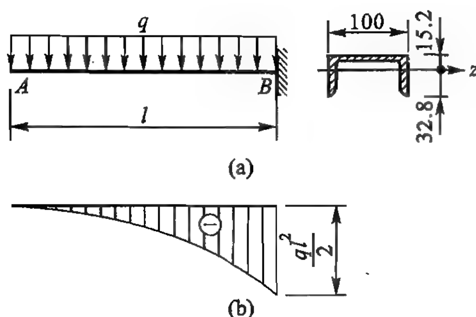


图 5－9

§5－2 惯性矩的计算

在上节中，导出了梁的弯曲正应力公式。显然，在应用这个公式计算梁的正应力时，须预先计算出梁横截面的惯性矩 I_z，为此，还有必要讨论惯性矩的一些计算方法。

1. 简单截面的惯性矩

对于矩形、圆形等简单图形的截面，其惯性矩可以直接根据式(5－1)的定义，用积分的方法来计算。下面分别计算几种常用简单截面的惯性矩。

(1) 矩形截面

设矩形截面的高和宽分别为 h 和 b，通过其形心 O 作 y 轴和 z 轴，如图 5－10 所示。现求其对 z 轴的惯性矩 I_z。取宽为 b 高为 $\mathrm{d}y$ 的狭长条的微面积，即取 $\mathrm{d}A=b\mathrm{d}y$，则由惯性矩的定义，积分得

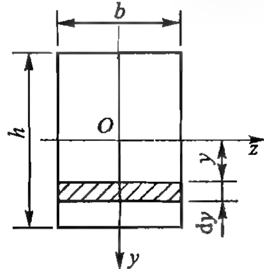


图 5－10

$$I_z=\int_A y^2\mathrm{d}A=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}y^2b\mathrm{d}y=b\left.\frac{y^3}{3}\right|_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}=\frac{bh^3}{12}\qquad(5-4\text{a})$$

同理可得对 y 轴的惯性矩

$$I_y = \frac{hb^3}{12} \tag{5-4b}$$

（2）圆形与圆环形截面

设圆形截面的直径为 D，y 轴和 z 轴通过圆心 O，如图 5－11a 所示。取微面积 $\mathrm{d}A$，其坐标为 y 和 z，至圆心距离为 ρ，在 §3－4 中，曾经得到，圆形截面对圆心的极惯性矩为

$$I_p = \int_A \rho^2 \mathrm{d}A = \frac{\pi D^4}{32}$$

现在由 $\rho^2 = y^2 + z^2$ 的关系可得

$$I_p = \int_A \rho^2 \mathrm{d}A = \int_A (y^2 + z^2) \mathrm{d}A = \int_A y^2 \mathrm{d}A + \int_A z^2 \mathrm{d}A = I_z + I_y$$

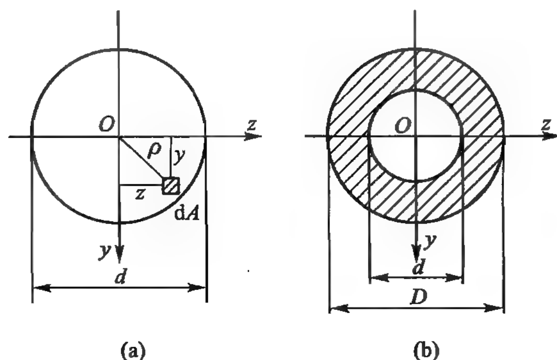


图 5－11

又由于 y 和 z 轴皆为通过圆截面直径的轴，故 $I_z = I_y$，因此

$$I_p = 2I_z = 2I_y$$

由此可得圆形截面对 z 轴或 y 轴的惯性矩为

$$I_z = I_y = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi D^4}{64} \tag{5-5}$$

对于外径为 D 内径为 d 的圆环形截面（图 5－11b），用同样的方法可以得到

$$I_z = I_y = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) \tag{5-6a}$$

或

$$I_z = I_y = \frac{\pi D^4}{64}(1 - \alpha^4) \tag{5-6b}$$

式中

$$\alpha = \frac{d}{D}$$

2. 组合截面的惯性矩　平行移轴公式

工程实际中有许多梁的截面形状是比较复杂的，例如由钢板焊成的箱形梁(图 5-12a)、由型钢和钢板并成的组合梁(图 5-12b、c)以及 T 字形梁(图 5-12d)等，机器的机架，其截面常采用更复杂的形式。所有这些梁的截面形式都是由一些简单图形组成的，所以称之为组合截面梁。

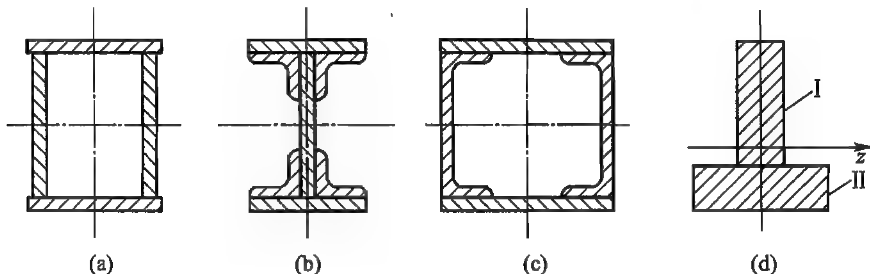


图 5-12

根据惯性矩的定义，组合截面对某一轴的惯性矩可以视为其各个组成部分(即简单图形)对同一轴的惯性矩之和。例如图 5-12d 所示的 T 字形截面，可将其分为两个矩形部分 I 和 II，整个截面对 z 轴的惯性矩 I_z 则为这两个矩形部分对 z 轴的惯性矩 $I_{z\text{I}}$ 与 $I_{z\text{II}}$ 之和，即

$$I_z = \int_{A\text{I}} y^2 \mathrm{d}A + \int_{A\text{II}} y^2 \mathrm{d}A = I_{z\text{I}} + I_{z\text{II}}$$

但是在计算 $I_{z\text{I}}$ 和 $I_{z\text{II}}$ 时，中性轴 z 并不通过这两个矩形的形心，这时，如果应用下述的平行移轴公式，计算就方便了。

设一任意形状的截面(图 5-13)，其面积为 A，z 轴通过截面的形心(称为形心轴)，并已知截面对 z 轴的惯性矩为 I_z。现有一 z_1 轴与 z 轴平行，两轴间的距离为 a，求截面对 z_1 轴的惯性矩 I_{z_1}。

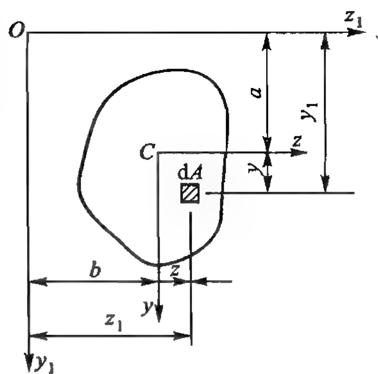


图 5-13

根据惯性矩的定义，由式(5-1)：

$$I_{z_1} = \int_A y_1^2 \mathrm{d}A$$

由图 5-13 中可以看出，$y_1 = y + a$，代入上式得

$$I_{z_1} = \int_A (y + a)^2 \mathrm{d}A = \int_A y^2 \mathrm{d}A + 2a\int_A y \mathrm{d}A + a^2 \int_A \mathrm{d}A$$

上式中等号右边的第一项是截面对 z 轴的惯性矩 I_z，第二项中的积分为截面对 z 轴的静矩 $S_z = y_C A$，因 z 轴通过截面形心，故 $y_C = 0$，所以第二项为零，第三项中的积分为截面的面积 A。因此，上式可表为

$$I_{z_1} = I_z + a^2 A \tag{5-7a}$$

同理可得

$$I_{y_1} = I_y + b^2 A \tag{5-7b}$$

式(5－7)说明截面对任一轴的惯性矩，等于它对平行于该轴的形心轴的惯性矩，加上截面面积与两轴间距离平方的乘积。这就是平行移轴公式。

公式中 z 与 y 分别是平行于 z_1 轴与 y_1 轴的形心轴，此公式不适用于两个任意平行轴。

公式表示：在所有相互平行的坐标轴中，对形心轴的惯性矩为最小。

下面举例说明这一公式的应用和组合截面惯性矩的计算。

例 5－2 一 T 字形截面如图 5－14 所示，求其对中性轴 z 的惯性矩。

解：

(1)确定形心和中性轴的位置　将截面划分为Ⅰ、Ⅱ两个矩形，取与截面底边相重合的 z'轴为参考轴，则两矩形的面积及其形心至 z'轴的距离分别为：

$$A_{\text{I}} = (0.02\ \text{m}) \times (0.06\ \text{m}) = 1.2 \times 10^{-3}\text{m}^2$$

$$y'_{\text{I}} = 0.02\ \text{m} + \frac{0.06\ \text{m}}{2} = 0.05\ \text{m}$$

$$A_{\text{II}} = (0.06\ \text{m}) \times (0.02\ \text{m}) = 1.2 \times 10^{-3}\text{m}^2$$

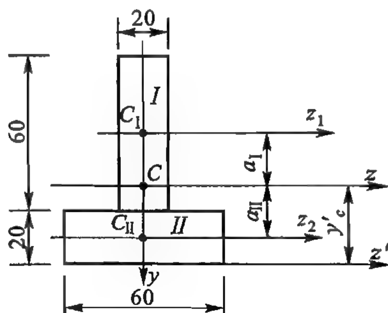


图 5－14

$$y'_{\text{II}} = \frac{0.02\ \text{m}}{2} = 0.01\ \text{m}$$

整个截面的形心 C 至 z'轴的距离则为

$$y'_C = \frac{\sum A_i y_i}{A} = \frac{A_{\text{I}} y'_{\text{I}} + A_{\text{II}} y'_{\text{II}}}{A_{\text{I}} + A_{\text{II}}} = \frac{(1.2 \times 10^{-3}\text{m}^2) \times (0.05\ \text{m}) + (1.2 \times 10^{-3}\text{m}^2) \times (0.01\ \text{m})}{1.2 \times 10^{-3}\text{m}^2 + 1.2 \times 10^{-3}\ \text{m}^2} = 0.03\ \text{m}$$

即中性轴 z 与 z'轴的距离为 0.03 m。

(2) 求各组成部分对中性轴 z 的惯性矩　设两矩形的形心轴为 z_1 和 z_2，它们距 z 轴的距离分别为：

$$a_{\text{I}} = CC_{\text{I}} = 0.02\ \text{m}, a_{\text{II}} = CC_{\text{II}} = 0.02\ \text{m}$$

由平行移轴公式(5－8)，两矩形对中性轴 z 的惯性矩分别为：

$$I_{z\text{I}} = I_{z_1\text{I}} + a_{\text{I}}^2 A_{\text{I}} = \frac{(0.02\ \text{m}) \times (0.06\ \text{m})^3}{12} + (0.02\ \text{m})^2 \times (1.2 \times 10^{-3}\text{m}^2) = 8.40 \times 10^{-7}\text{m}^4$$

$$I_{z\text{II}} = I_{z_2\text{II}} + a_{\text{II}}^2 A_{\text{II}} = \frac{(0.06\ \text{m}) \times (0.02\ \text{m})^3}{12} + (0.02\ \text{m})^2 \times (1.2 \times 10^{-3}\text{m}^2) = 5.2 \times 10^{-7}\ \text{m}^4$$

(3) 求整个截面对中性轴的惯性矩　将两矩形对 z 轴的惯性矩相加，得

$$I_z = I_{z\text{I}} + I_{z\text{II}} = 8.4\times10^{-7}\text{m}^4 + 5.2\times10^{-7}\text{m}^4 = 1.36\times10^{-6}\text{ m}^4$$

为便于计算组合截面的惯性矩，表 5－1 中给出了一些简单图形的形心位置及其对形心轴的惯性矩。各种型钢的惯性矩则可直接由型钢规格表①中查得。

表 5－1　几种图形的形心位置和惯性矩

图　形	形心位置	惯　性　矩
矩形（b，h）	$e=\dfrac{h}{2}$	$I_z=\dfrac{bh^3}{12}$ $I_y=\dfrac{hb^3}{12}$
空心矩形（B，H，b，h）	$e=\dfrac{H}{2}$	$I_z=\dfrac{BH^3-bh^3}{12}$ $I_y=\dfrac{HB^3-hb^3}{12}$
工字形（B，H，$\frac{b}{2}$，h）	$e=\dfrac{H}{2}$	$I_z=\dfrac{BH^3-bh^3}{12}$ $I_y=\dfrac{(H-h)B^3+h(B-b)^3}{12}$
圆形（d）	$e=\dfrac{d}{2}$	$I_z=I_y=\dfrac{\pi d^4}{64}$
圆环（D，d）	$e=\dfrac{D}{2}$	$I_z=I_y=\dfrac{\pi(D^4-d^4)}{64}$

① 型钢规格表见附录一。常用的型钢有工字钢、槽钢和角钢等。工字钢和槽钢的号数以其高度来表示，角钢的号数则根据其边长来表示。

续表

图　形	形心位置	惯　性　矩
	$e=\frac{h}{3}$	$I_z=\frac{bh^3}{36}$
	$e=\frac{4r}{3\pi}\approx 0.424r$	$I_z=\left(\frac{1}{8}-\frac{8}{9\pi^2}\right)\pi r^4\approx 0.110r^4$
	$e=b$	$I_z=\frac{\pi ab^3}{4}$ $I_y=\frac{\pi ba^3}{4}$

§5-3 梁弯曲时的强度计算

由梁的弯曲正应力公式知道，对某一横截面来说，最大正应力在距中性轴最远的地方；而梁各横截面上的弯矩是随截面的位置而变的，对等截面梁来说，弯矩绝对值最大的截面为危险截面。因此，就全梁而言，最大正应力位于最大弯矩所在截面上距中性轴最远的地方，对于 z 轴对称的截面，最大拉应力与最大压应力绝对值相等，最大正应力计算式为：

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}y_{max}}{I_z} \tag{5-8}$$

式中的 I_z 和 y_{max}，都是与截面的形状、尺寸有关的几何量，可以用 W_z 来表示，即令

$$\frac{I_z}{y_{max}}=W_z \tag{5-9}$$

W_z 称为抗弯截面系数，它是衡量横截面抗弯强度的一个几何量，其值与横截面的形状及尺寸有关，单位为 m^3 或 mm^3 对于矩形截面（图 5-10），

$$W_z=\frac{I_z}{y_{max}}=\frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}}=\frac{bh^2}{6} \tag{5-10}$$

对于圆形截面(图 5－11a)

$$W_z=\frac{I_z}{y_{max}}=\frac{\frac{\pi d^4}{64}}{\frac{d}{2}}=\frac{\pi d^3}{32}\approx 0.1d^3 \tag{5-11}$$

对于空心圆形截面(图 5－11b),

$$W_z=\frac{I_z}{y_{max}}=\frac{\frac{\pi D^4}{64}(1-\alpha^4)}{\frac{D}{2}}=\frac{\pi D^3}{32}(1-\alpha^4)$$

$$\approx 0.1D^3(1-\alpha^4) \tag{5-12}$$

各种型钢的 W_z 值也可由型钢规格表中查得。

这样,最大正应力的计算式可表为

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{W_z} \tag{5-13}$$

对于剪切弯曲的梁,横截面上还有切应力作用,但在上下边缘处各点的切应力为零(见 §5－4),处于只受简单拉伸或压缩的状态。这样,如果限制梁的最大工作应力 σ_{max},使其不超过材料的许用弯曲正应力,就可以保证梁的安全。因此,梁弯曲时的正应力强度条件为

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{W_z}\leqslant[\sigma] \tag{5-14}$$

式中:M_{max}——梁的最大弯矩;

W_z——横截面的抗弯截面系数;

$[\sigma]$——材料的许用弯曲正应力。

关于许用弯曲正应力$[\sigma]$的选取,对薄壁型钢一般可用轴向拉伸时的许用应力值;对于实心钢梁,可以略高一些,这是因为上下边缘处的最大正应力即使已到达屈服极限,还不致引起梁的破坏,在靠近中性轴的地方尚有许多材料仍处于弹性阶段,还能承担一定的载荷。许用弯曲正应力的具体数值,可由有关规范中查得,或根据规范中规定的安全因数和材料的屈服极限 σ_s 或抗拉强度 σ_b 来确定。

例 5－3 一矩形截面木梁如图 5－15a 所示,已知 $F=10$ kN,$a=1.2$ m;木材的许用应力 $[\sigma]=10$ MPa。设梁横截面的高宽比为 $h/b=2$,试选梁的截面尺寸。

解:

(1)作弯矩图,求最大弯矩　用叠加法作出梁的弯矩图如图 5－15b 所示,由图知最大弯矩为

$$|M|_{max}=Fa=(10\times10^3\ \text{N})\times(1.2\ \text{m})=1.2\times10^4\ \text{N}\cdot\text{m}=12\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

(2) 选择截面尺寸　由强度条件

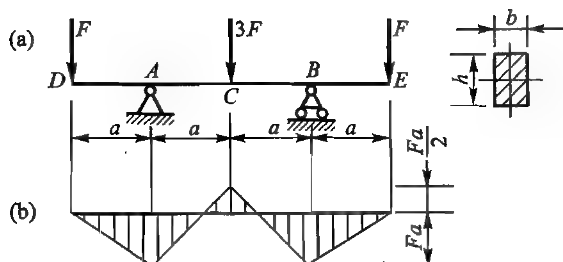


图 5-15

$$\frac{M_{max}}{W_z}\leqslant[\sigma]$$

得

$$W_z\geqslant\frac{M_{max}}{[\sigma]}=\frac{12\times10^3\ \mathrm{N\cdot m}}{10\times10^6\ \mathrm{N/m^2}}=1\ 200\times10^{-6}\ \mathrm{m}^3$$

由式(5-10),截面的抗弯截面系数

$$W_z=\frac{bh^2}{6}=\frac{b(2b)^2}{6}=\frac{2b^3}{3}$$

故

$$\frac{2b^3}{3}\geqslant1\ 200\times10^{-6}\ \mathrm{m}^3$$

由此得

$$b\geqslant\sqrt[3]{\frac{3}{2}(1\ 200\times10^{-6}\ \mathrm{m}^3)}=0.121\ 6\ \mathrm{m}$$

$$h=2b=243\ \mathrm{mm}$$

最后选用 $125\times250\ \mathrm{mm}^2$ 的截面。

对于许用拉应力与许用压应力相同的材料,如采用中性轴为对称轴的截面,则产生最大拉应力与最大压应力的点为最大弯矩的截面的两边缘上的点。

例 5-4 加热炉的水管横梁两端支于炉壁上,通过纵向水管作用于其上的钢坯压力 $F=5$ kN,如图 5-16a 所示。已知 $l=1.8$ m,$a=0.6$ m;水管的许用应力$[\sigma]=80$ MPa。设钢管的内径与外径之比 $\alpha=\frac{d}{D}=\frac{5}{6}$,试选择水管的截面尺寸。

解:炉壁对水管横梁的约束可视为两端铰支,将横梁简化为一简支梁,其计算简图如图 5-16b所示。

(1)作弯矩图,求最大弯矩　水管横梁的弯矩图如图 5-16c 所示,最大弯矩为

$$M_{max}=Fa=(5\times10^3\ \mathrm{N})\times(0.6\ \mathrm{m})=3\times10^3\ \mathrm{N\cdot m}=3\ \mathrm{kN\cdot m}$$

(2) 选择截面尺寸　由强度条件式(5-14),

$$W_z\geqslant\frac{M_{max}}{[\sigma]}=\frac{3\times10^3\ \mathrm{N\cdot m}}{80\times10^6\ \mathrm{N/m^2}}=37.5\times10^{-6}\ \mathrm{m}^3$$

由式(5-12),

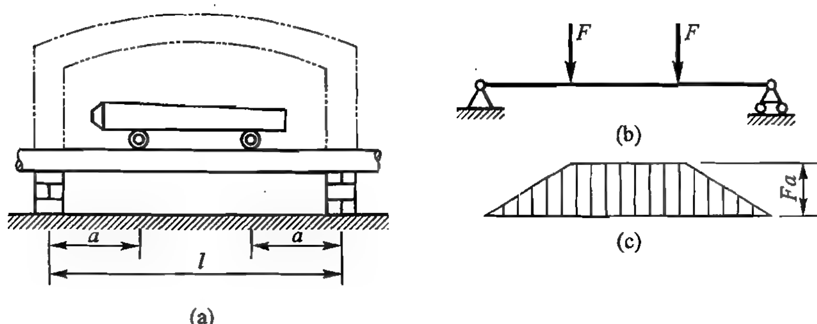


图 5－16

$$W_z \approx 0.1D^3(1-\alpha^4) \geqslant 37.5\times10^{-6}\ \mathrm{m}^3$$

则

$$D \geqslant \sqrt[3]{\frac{37.5\times10^{-6}\ \mathrm{m}^3}{0.1(1-\alpha^4)}} = \sqrt[3]{\frac{37.5\times10^{-6}\ \mathrm{m}^3}{0.1\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^4\right]}} = 0.09\ \mathrm{m}$$

查钢管规范，选用外径 $D=89$ mm，壁厚 $\delta=7$ mm 的钢管，其内外径之比 $\frac{d}{D}=\frac{89-14}{89}\approx\frac{5}{6}$，外径尺寸稍小于计算结果，但其工作应力不会超过许用应力的 5%，这种情况，在工程实际中是允许的。

例 5－5　一起重量原为 50 kN 的单梁吊车，其跨度 $l=10.5$ m，由 45a 工字钢制成。为发挥其潜力，现拟将起重量提高到 $F=70$ kN，试校核梁的强度。若强度不够，再计算其可能承载的起重量。梁的材料为 Q235A 钢，许用应力 $[\sigma]=140$ MPa；电葫芦自重 $W=15$ kN，梁的自重暂不考虑（图 5－17a）。

解：

（1）作弯矩图，求最大弯矩　可将吊车简化为一简支梁，如图 5－17b 所示，显然，当电葫芦行至梁中点时所引起的弯矩最大，这时的弯矩图如图 5－17c 所示。在中点处横截面上的弯矩为

$$M_{\max}=\frac{(F+W)l}{4}=\frac{1}{4}(7\times10^4\ \mathrm{N}+1.5\times10^4\ \mathrm{N})\times(10.5\ \mathrm{m})=2.23\times10^5\ \mathrm{N\cdot m}$$
$$=223\ \mathrm{kN\cdot m}$$

（2）校核强度　由型钢表查得 45a 工字钢的抗弯截面系数

$$W_z=1.43\times10^{-3}\ \mathrm{m}^3$$

故梁的最大工作应力为

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W_z}=\frac{2.23\times10^5\ \mathrm{N\cdot m}}{1.43\times10^{-3}\mathrm{m}^3}=1.56\times10^8\ \mathrm{Pa}=156\ \mathrm{MPa}>140\ \mathrm{MPa}$$

故不安全，不能将起重量提高到 70 kN。

（3）计算承载能力　梁允许的最大弯矩为

$$M_{max} = [\sigma]W_z = (1.40\times10^8\ \text{N/m}^2)(1.43\times10^{-3}\ \text{m}^3) = 2\times10^5\ \text{N}\cdot\text{m} = 200\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

则由 $M_{max}=\dfrac{(F+W)l}{4}$得

$$F = \frac{4M_{max}}{l} - W = \frac{4(2\times10^5\ \text{N}\cdot\text{m})}{10.5\ \text{m}} - 1.5\times10^4\text{N}$$
$$= 6.13\times10^4\ \text{N} = 61.3\ \text{kN}$$

故按梁的强度，原吊车梁只允许吊运 61.3 kN 的重量。

例 5－6 在上例中，为使吊车的起重量提高到 70 kN，可在工字梁的上、下翼缘上加焊两块盖板（图 5－18）。现设盖板的截面尺寸为 $100\times10\ \text{mm}^2$，试校核加焊盖板后梁的强度。有关数据仍如上例。

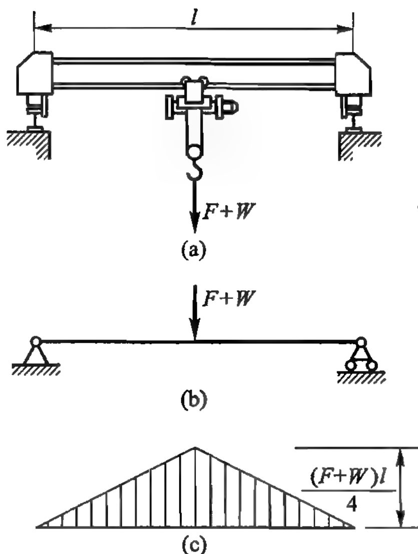


图 5－17

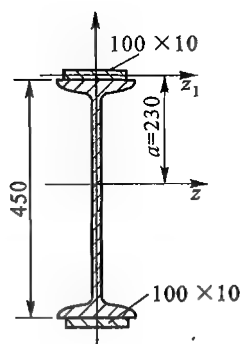


图 5－18

解：吊车梁加焊盖板后，截面的惯性矩改变，为进行强度校核，首先计算截面的惯性矩。

（1）计算截面的惯性矩　加焊两块盖板后，中性轴 z 的位置保持不变。设工字钢对 z 轴的惯性矩为 I'_z，每个盖板对 z 轴的惯性矩为 I''_z，则整个截面对 z 轴的惯性矩为

$$I_z = I'_z + 2I''_z$$

自型钢规格表查得

$$I'_z = 3.224\times10^{-4}\text{m}^4$$

根据图 5－17 所示尺寸，由平行移轴公式，

$$I''_z = I_{z1} + a^2A = \frac{1}{12}(0.1\ \text{m})\times(0.01\ \text{m})^3 + (0.23\ \text{m})^2\times(0.1\ \text{m})\times(0.01\ \text{m})$$
$$= 2.59\times10^{-5}\ \text{m}^4$$

故

$$I_z = (3.224 + 2\times0.259)\times10^{-4}\text{m}^4$$

$$=4.282\times10^{-4}\ \text{m}^4$$

(2) 校核强度　由前例已知梁的最大弯矩为

$$M_{\max}=2.23\times10^5\ \text{N}\cdot\text{m}$$

截面上下缘距中性轴的距离为

$$y_{\max}=\frac{1}{2}(0.45\ \text{m})+0.01\ \text{m}=0.235\ \text{m}$$

则由式(5-8),得

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}y_{\max}}{I_z}=\frac{(2.23\times10^5\ \text{N}\cdot\text{m})\times(0.235\ \text{m})}{4.282\times10^{-4}\text{m}^4}$$

$$=1.22\times10^8\ \text{Pa}=122\ \text{MPa}<140\ \text{MPa}=[\sigma]$$

计算表明,经加固后起重量可提高到 70 kN。

例 5-7　一T形截面铸铁梁如图 5-19a 所示。已知 $F_1=8$ kN,$F_2=20$ kN,$a=0.6$ m;横截面的惯性矩 $I_z=5.33\times10^{-6}\ \text{m}^4$;材料的抗拉强度 $\sigma_b=240$ MPa,抗压强度 $\sigma_{bc}=600$ MPa。取安全因数 $n=4$,试校核梁的强度。

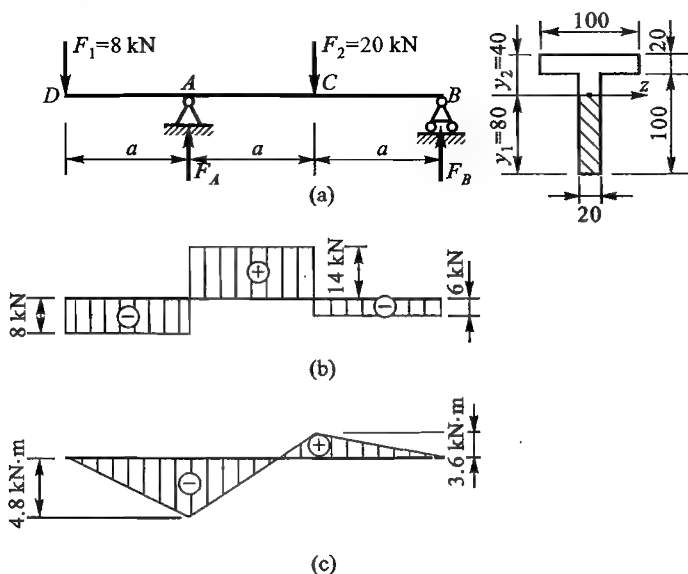


图 5-19

解:

(1)作弯矩图　由静力平衡条件求得梁的支座反力为:

$$F_A=22\ \text{kN},F_B=6\ \text{kN}$$

作出梁的弯矩图如图 5-19c 所示。由图知截面 A 或 C 可能为危险截面,且

$$M_A=-4.8\ \text{kN}\cdot\text{m},M_C=3.6\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

(2) 确定许用应力　材料的许用拉应力和许用压应力分别为:

$$[\sigma_t]=\frac{\sigma_b}{n}=\frac{240\ \text{MPa}}{4}=60\ \text{MPa}$$

$$[\sigma_c]=\frac{\sigma_{bc}}{n}=\frac{600\ \text{MPa}}{4}=150\ \text{MPa}$$

(3) 校核强度　由弯矩图可以判明,截面 A 的下边缘及截面 C 的上边缘处受压,截面 A 的上边缘及截面 C 的下边缘受拉。分别比较二截面的最大压应力及最大拉应力:因 $|M_A| > |M_C|$,$|y_1| > |y_2|$,故截面 A 下边缘处的压应力最大;计算截面 A 上边缘的拉应力时,虽 $|M_A| > |M_C|$,但 $|y_2| < |y_1|$;计算截面 C 下边缘的拉应力时,虽 $|M_C| < |M_A|$,但 $|y_1| > |y_2|$,故需经过计算后,才能判明此二处的拉应力哪处最大。

由上述的分析知,需校核以下各处的正应力:

截面 A 下边缘处,

$$\sigma_c = \frac{M_A y_1}{I_z} = \frac{(4.8 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}) \times (80 \times 10^{-3} \text{m})}{5.33 \times 10^{-6} \text{m}^4} = 72 \times 10^6 \text{ Pa}$$

$$= 72 \text{ MPa} < [\sigma_c] = 150 \text{ MPa}$$

截面 A 上边缘处,

$$\sigma_t = \frac{M_A y_2}{I_z} = \frac{(4.8 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}) \times (40 \times 10^{-3} \text{m})}{5.33 \times 10^{-6} \text{ m}^4} = 36 \times 10^6 \text{ Pa}$$

$$= 36 \text{ MPa} < [\sigma_t] = 60 \text{ MPa}$$

截面 C 下边缘处,

$$\sigma_t = \frac{M_C y_1}{I_z} = \frac{(3.6 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}) \times (80 \times 10^{-3} \text{m})}{5.33 \times 10^{-6} \text{m}^4} = 54 \times 10^6 \text{ Pa}$$

$$= 54 \text{ MPa} < [\sigma_t] = 60 \text{ MPa}$$

结果说明,各处皆满足强度条件。

对于脆性材料,许用压应力一般大于许用拉应力,在采用中性轴为非对称轴的截面时,应该分别考虑最大正弯矩和最大负弯矩所在截面边缘上的点,分别校核其拉应力强度和压应力强度。

§5-4 提高梁抗弯强度的措施

在工程实际中,为了节省材料或减轻梁的自重,力求以较少的材料消耗,使梁获得更大的抗弯强度。下面就根据正应力强度条件提出几个提高梁抗弯强度的措施。

1. 选用合理的截面

由梁的正应力强度条件知道,梁的抗弯截面系数愈大,横截面上的最大正应力就愈小,梁的抗弯强度就愈大;另一方面,由材料的使用来说,梁横截面的面积愈大,消耗的材料就愈多。因此,梁的合理截面应该是,用最小的截面面积 A,使其有更大的抗弯截面系数 W_z。可以用比值 W_z/A 来衡量截面的经济程度。这个比值愈大,所采用的截面就愈经济合理。例如一根钢梁,如最大弯矩 $M_{max} = 35 \text{ kN} \cdot \text{m}$,许用弯曲正应力 $[\sigma] = 140 \text{ MPa}$,它所要求的抗弯截面系数为

$$W_z = \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{35 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}}{1.4 \times 10^8 \text{ N/m}^2} = 250 \times 10^{-6} \text{ m}^3 = 250\ 000 \text{ mm}^3$$

如果采用圆形、矩形和工字形三种不同的截面，它们所需要的截面尺寸及相应的比值 W_z/A 列于表 5－2。

表 5－2　三种不同截面所需的截面尺寸及相应 W_z/A 值

截面形状	要求的 W_z /mm^3	所需尺寸 /mm	截面面积 /mm^2	比值 W_z/A
圆形（z，y，d）	250 000	$d=137$	14 800	1.69
矩形（z，y，h，b）	250 000	$b=72$ $h=144$	10 400	2.4
工字形（z，y）	250 000	20b 号工字钢	3 950	6.33

由表中数据可见，采用矩形截面比圆形截面合理，而工字形截面又比矩形截面合理。由正应力在梁横截面上的分布情况来看，这一点是易于理解的。因为在距中性轴愈远的地方正应力愈大，外力对梁的作用主要由距中性轴较远的这部分材料来承担，圆形截面梁的大部分材料靠近中性轴，未能充分发挥作用，所以是不合理的，而工字形截面梁则相反，它的很大一部分材料充分地发挥了作用，这就比较合理。可见，为了更好地发挥材料的作用，应尽可能地将材料放在离中性轴较远的地方。一个矩形截面梁，将截面竖搁比横搁时能承担更大的载荷；在工程实际中许多受弯曲的构件采用工字形、箱形、槽形等截面形状，就是这个道理。

选择梁的合理截面，还应考虑到材料的特性。上述的几种截面形式都是对称于中性轴的，这对于钢材等抗拉与抗压性能相同的材料来说，是合理的，因为这样可使截面上的最大拉应力 $\sigma_{t,max}$ 和最大压应力 $\sigma_{c,max}$ 同时达到材料的许用应力 $[\sigma]$，使中性轴上、下两侧的材料都同时发挥了作用。但对于抗拉与抗压能力

不相同的材料，例如铸铁，则应采用不对称于中性轴的截面，并使中性轴偏于受拉的一侧。这样可使横截面上的最大拉应力小于最大压应力。例如图 5 - 20 所示的 T 字形截面就比较合理。如能使中性轴的位置满足条件：

$$\frac{\sigma_{c,\max}}{\sigma_{t,\max}}=\frac{\dfrac{My_1}{I_z}}{\dfrac{My_2}{I_z}}=\frac{[\sigma_c]}{[\sigma_t]}$$

即

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{[\sigma_c]}{[\sigma_t]}$$

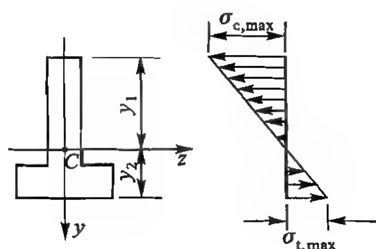


图 5 - 20

则最大拉应力和最大压应力就能同时达到材料的许用值，这样就使中性轴上、下两侧的材料各尽其用了。

2. 采用变截面梁

除了根据梁横截面上正应力的分布规律来选择合理的截面外，就整个梁而言，根据梁各截面弯矩的不同，也存在沿梁的轴线方向如何充分利用材料的问题。等截面梁的截面尺寸是根据危险截面上的最大弯矩来确定的，除危险截面外，其他截面的弯矩都比较小，在这些地方，材料都未被充分利用。从强度的角度来看，如果在弯矩较大的部位采用较大的截面，在弯矩较小的部位采用较小的截面，就比较合理。这种横截面尺寸沿梁轴线方向变化的梁，称为变截面梁。在工程实际中不少构件都采用了变截面梁的形式。例如，上下加焊盖板的板梁（图 5 - 21a），传动系统中的阶梯轴（图 5 - 21b），摇臂钻床的摇臂（图 5 - 21c）等，都是根据各截面上弯矩的不同而采用的变截面梁。

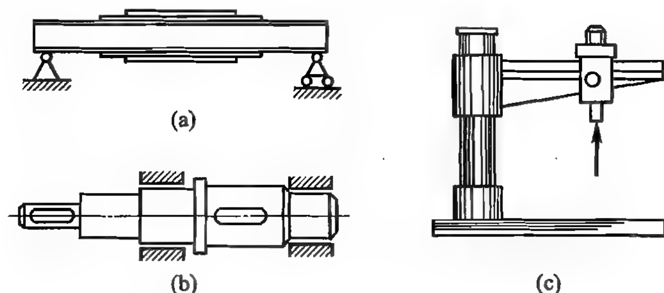


图 5 - 21

如果将变截面梁设计为使每个横截面上的最大正应力都等于材料的许用应力值，这种梁称为等强度梁。显然，这种梁的材料消耗最少，重量最轻，是最合理的。但实际上，由于加工制造等因素，一般只能近似地做到等强度的要求。图

5－22所示的鱼腹梁，就是一种很接近等强度要求的形式。

3．适当布置载荷和支座位置

由梁的内力一章中知道，梁的弯矩图与载荷的作用位置和梁的支承方式有关。在可能的情况下，如果适当地调整载荷或支座的位置，可以减小梁的最大弯矩，增大梁的抗弯强度。例如图5－23所示的传动轴，当齿轮位于轴跨中点时，轴因啮合力 F 而引起的最大弯矩为 $Fl/4$（图5－23a）；如果将齿轮尽量安装在靠近轴承的地方，例如在距右轴承 $l/6$ 处（图5－23b），其最大弯矩则为 $\frac{5}{36}Fl$，仅为前者的55.5%，所需的轴径也就可以相应地减小。

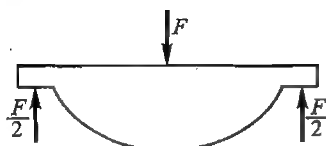


图5－22

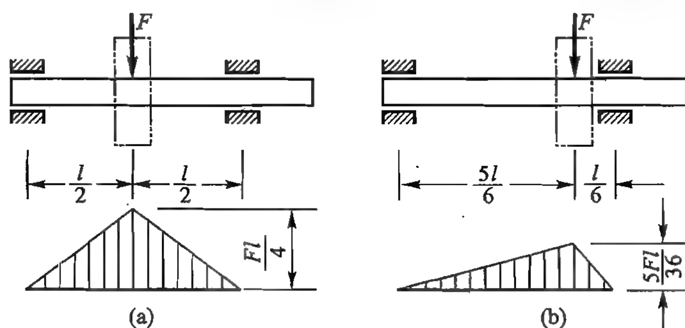


图5－23

又如图5－24所示的单轨吊车梁，若支座在梁的两端，则电葫芦行至梁中点

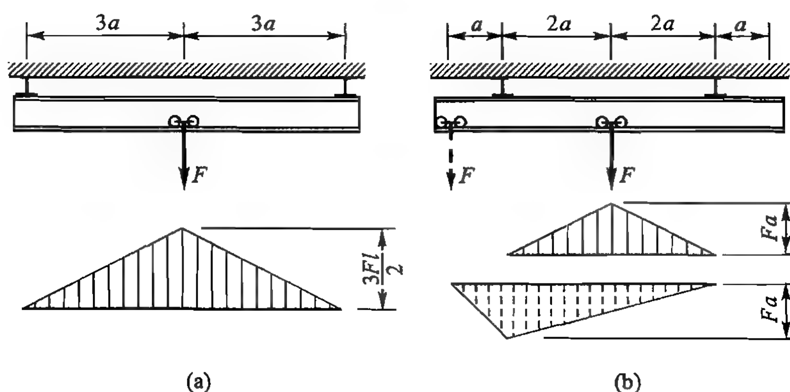


图5－24

时的最大弯矩为$\frac{3}{2}Fa$（图 5－24a）；如果将两支座向内移至图 5－24b 所示的位置，这时无论电葫芦行至梁的端点或中点，梁的最大弯矩皆为 Fa，减少了$\frac{1}{3}$。可见调整支座位置也是提高梁抗弯强度的有效办法。

对于梁上的集中载荷，如果能适当地将它分散，也可提高梁的抗弯强度。以图 5－25 的简支梁为例，集中力 F 作用在梁的中点时，其最大弯矩为 $Fl/4$（图 5－25a）；如将力 F 以集度 $q=F/l$ 均布于整根梁上，这时的最大弯矩仅为 $Fl/8$（图 5－25b），减少了一半。同样，若用一根副梁将力 F 分为两个靠近支座的集中力，也可减小梁的最大弯矩。例如按图 5－25c 所示的位置安放副梁，主梁的最大弯矩也可减小为 $ql/8$。根据这个道理，上海的运输工人和技术人员，曾在运送重 1.2 MN 的 12.5 万千瓦双水内冷汽轮机组的重型设备时，为使其通过只能行驶 130 kN 汽车的公路桥，特制了一个大型平板车（图 5－26），其宽度与桥宽相近，长度超过桥孔跨度，底盘上装有 7 排 8 行共 56 个车轮。这样就使包括平板车自重 1.6 MN 的载荷，近似均布地分散在较长较宽的面积上；而且，因车身长度超过桥的跨度，不致使全部重量都落在一个桥孔上。这样就大大提高了桥梁的承载能力，使平板车顺利地通过。

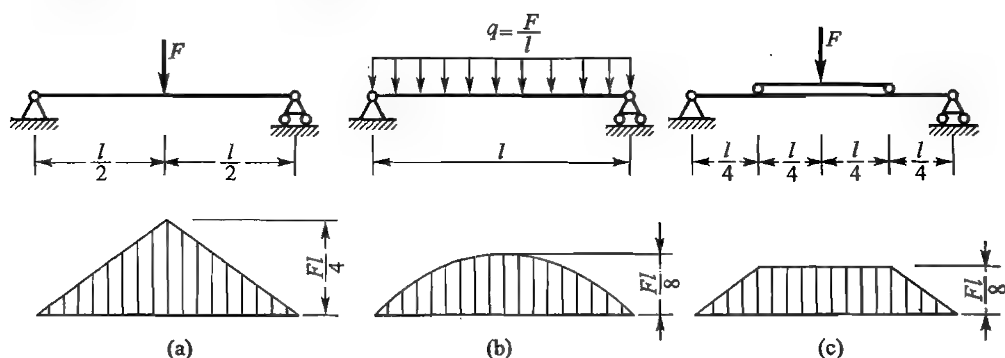


图 5－25

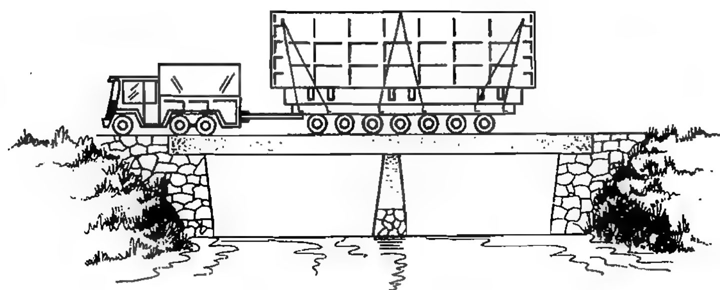


图 5－26

应该指出，上面所提出的一些措施，仅是从抗弯强度的角度出发的。在实际工作中，设计一个构件时，还应考虑刚度、稳定性、工艺条件、加工制造等各方面的因素。例如增加梁横截面的高度，可以增大截面的抗弯截面系数，但并不是越高越好，否则就可能使梁突然地发生侧向变形，而丧失稳定。变截面梁固然经济，但其刚度却会降低，加工制造比较费工。将载荷分散的办法，也只能根据条件和需要来采用。

* §5－5 塑性弯曲的概念

在§5－3中，根据弯曲正应力公式曾建立了梁的强度条件

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{W_z}\leqslant[\sigma]$$

这个公式是在材料服从胡克定律的情况下导出的，并认为当危险截面上、下边缘处的最大正应力 σ_{max} 到达屈服极限 σ_s 时，整个梁就处于危险状态。按这一考虑来建立强度条件的方法称许用应力法。

实际上，对于塑性材料制成的梁，按这一强度条件来进行设计，并未充分发挥梁的承载能力。因为当最大应力到达屈服极限时，仅靠近梁上、下边缘处的部分材料屈服，而梁的大部分材料仍处于弹性阶段，梁仍能继续承担更大的载荷。只有当整个截面上的材料都进入屈服阶段，梁才会丧失承载能力。因此，在工程实际中就提出了这样的考虑：为了充分发挥梁的承载能力，在静载荷作用下，可以让部分材料进入塑性阶段，而当塑性区扩大到整个截面时才认为梁处于危险状态。以此为根据来建立强度条件的方法称为许用载荷法。下面就以截面形状对称于中性轴的梁（如矩形、工字形、圆形截面梁等）为例，来说明当材料进入塑性状态时横截面上的应力分布情况和梁承载能力的计算。

设一纯弯曲的矩形截面梁，横截面上的弯矩为 M，当梁上应力不超过比例极限时，横截面上的正应力分布如图5－27a所示。如弯矩 M 增大，在最大正应力 σ_{max} 到达屈服极限后，则从梁的上、下边缘处开始，梁的部分材料将相继进入塑性阶段。这时，由于梁各横截面仍保持为一平截面，因而梁各纵向纤维的应变 ε 与距中性层的距离成正比，如图5－27b所示。但由拉伸试验的应力－应变曲线知，对于由具有明显屈服阶段的材料制成的梁，在梁上、下边缘附近的塑性区，各纵向纤维的应变虽然在增加，但应力却不再增加，仍保持为屈服极限 σ_s 之值。这时横截面上的应力分布情况如图5－27c所示，在靠近中性层的部分材料仍处于弹性阶段。

如果弯矩继续增加，塑性区将不断扩大；弹性区则不断缩小。当塑性区扩大至整个截面时，各点处的正应力都先后到达屈服极限 σ_s，如图5－27d所示。这

时无需增加很大的弯矩，就可使梁产生更大的变形，梁表现为丧失了承载能力。若以这种情况作为梁的危险状态，则此时横截面上的弯矩 M_s 称为极限弯矩。

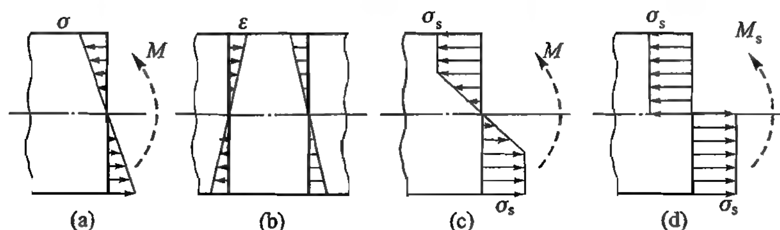


图 5-27

现在来计算极限弯矩 M_s 之值。由于横截面形状对称于中性轴，则中性轴上、下两侧截面面积 A_1 和 A_2 相等，且分别受压和受拉。根据图 5-27d 所示的应力分布情况，由求合力偶矩的方法可以求得极限弯矩为

$$M_s = \int_{A_1} \sigma_s y \mathrm{d}A + \int_{A_2} \sigma_s y \mathrm{d}A = \sigma_s \left[\int_{A_1} y \mathrm{d}A + \int_{A_2} y \mathrm{d}A \right]$$
$$= \sigma_s (S_1 + S_2) = 2\sigma_s S$$

式中：$S_1 = S_2 = S$ 为中性轴一侧截面面积对中性轴的静矩。

上式又可改写为下面的形式：

$$M_s = \sigma_s W_s \tag{5-15}$$

式中：$W_s = 2S$ 称为塑性抗弯截面系数。考虑安全因数后，截面的许用弯矩为

$$[M] = \frac{M_s}{n} = \frac{\sigma_s}{n} W_s = W_s [\sigma]$$

由此可得按许用载荷法计算的强度条件为

$$M_{max} \leqslant [M] = W_s [\sigma] \tag{5-16}$$

式中：M_{max}——梁横截面上的最大工作弯矩；

$[M]$——梁横截面上的许用弯矩；

W_s——塑性抗弯截面系数；

$[\sigma]$——弯曲许用正应力。

显然，按许用载荷法求得的 M_{max} 要比按许用应力法求得的 M_{max} 为大，它们的比值即为塑性抗弯截面系数 W_s 与抗弯截面系数 W_z 之比。对于矩形截面有

$$W_s = 2\left(\frac{bh}{2} \times \frac{h}{4}\right) = \frac{bh^2}{4}, W_z = \frac{bh^2}{6}$$

$$\frac{W_s}{W_z} = \frac{\dfrac{bh^2}{4}}{\dfrac{bh^2}{6}} = 1.5$$

对于圆形截面，有

$$W_s = 2\left(\frac{\pi r^2}{2} \cdot \frac{4r}{3\pi}\right) = \frac{4}{3}r^3, \quad W_z = \frac{\pi}{4}r^3$$

$$\frac{W_s}{W_z} = \frac{\frac{4}{3}r^3}{\frac{\pi}{4}r^3} = 1.7$$

可见,按许用载荷法来选择梁的尺寸要比按许用应力法经济,能更充分发挥材料的潜力。

* §5-6 梁弯曲时的切应力

在剪切弯曲时,梁横截面上不仅有正应力 σ,还有切应力 τ。一般说来,弯曲正应力是支配梁强度计算的主要因素,但在某些情况下,例如一些跨长较短截面较窄而高的梁,它们的切应力就可能达到相当大的数值,这时还有必要进行切应力的强度校核。下面结合矩形截面梁说明横截面上切应力的计算方法,并介绍几种常见截面梁的最大切应力。

1. 矩形截面梁

设一宽为 b 高为 h 的矩形截面梁,在其截面上沿 y 轴方向有剪力 F_S,如图 5-28所示。如 $h>b$,可以假设横截面上任意点处的切应力 τ 都平行于剪力 F_S,且距中性轴等远各点上的切应力相等。这时横截面上任意点处的切应力的计算公式为①

$$\tau = \frac{F_S S_z^*}{I_z b} \tag{5-17}$$

式中:F_S——横截面上的剪力;

I_z——整个横截面对中性轴 z 的惯性矩;

b——横截面在所求切应力处的宽度;

S_z^*——横截面上切应力 τ 所在点的横线至边缘部分的面积(即图 5-28 中的阴影部分)对中性轴的静矩。

如求距中性轴 y 处横线上的切应力 τ,由图 5-28,此时上式中的静矩为

$$S_z^* = b\left(\frac{h}{2} - y\right)\left(y + \frac{\frac{h}{2} - y}{2}\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

将其代入式(5-17),可得

$$\tau = \frac{F_S}{2I_z}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

① 参看孙训方、方孝淑、陆耀洪编《材料力学》(第二版,上册),高等教育出版社,1991 年。

由此式可见，矩形截面梁的切应力 τ 沿截面高度方向按二次抛物线规律变化（图 5－28）。当 $y=\pm\frac{h}{2}$时，即在横截面的上、下边缘处，$\tau=0$；当 $y=0$ 时，即在中性轴上，切应力最大，其值为

$$\tau_{\max}=\frac{F_S}{2I_z}\frac{h^2}{4}=\frac{F_S h^2}{8\times\frac{bh^3}{12}}=\frac{3}{2}\times\frac{F_S}{bh}$$

或

$$\tau_{\max}=\frac{3}{2}\frac{F_S}{A} \qquad (5-18)$$

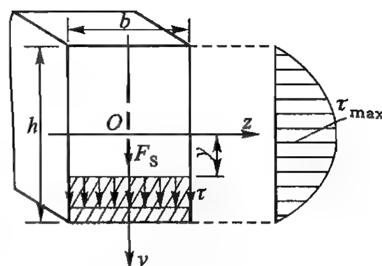


图 5－28

式中 $A=bh$ 为矩形截面的面积。此式说明，矩形截面梁横截面上的最大切应力值为平均切应力 F_S/A 的 1.5 倍。

2. 工字形截面梁

工字形截面梁由腹板和翼缘组成。其横截面如图 5－29 所示，中间狭长部分为腹板，上、下扁平部分为翼缘。梁横截面上的切应力主要分布于腹板上，翼缘部分的切应力情况比较复杂，数值很小，可以不予考虑。由于腹板比较狭长，可以充分地认为，其上的切应力平行于腹板的竖边，且沿宽度方向均匀分布。由式(5－17)求得，切应力 τ 沿腹板高度方向也是呈二次抛物线规律变化（图5－29），最大切应力在中性轴上，其值为

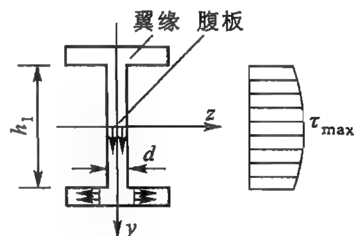


图 5－29

$$\tau_{\max}=\frac{F_S S^*_{z\max}}{I_z d} \qquad (5-19)$$

式中： d——腹板的宽度；

$S^*_{z\max}$——中性轴一侧的截面面积对中性轴的静矩。

在计算工字型钢的 $\tau_{\max}$时，式中的比值$\frac{I_z}{S^*_{z\max}}$可直接由型钢规格表中查得。

此外，由图 5－29 可以看到，腹板上的最大切应力与最小切应力差别并不太大，切应力接近于均匀分布，因此也可按下式近似地估算腹板上的最大切应力：

$$\tau_{\max}\approx\frac{F_S}{dh_1} \qquad (5-20)$$

式中：d——腹板的宽度；

h_1——腹板的高度。

3. 圆形、圆环形截面梁

在圆形截面上，距中性轴 y 处弦线 ab 的两端，剪应力的方向必切于周边，并相交于 y 轴上的 d 点；而在弦线中点 C 处，由于对称，剪应力的方向也必通过 d 点。由于剪应力的方向是连续变化的，因而可以假设弦线 ab 上剪应力 τ 的方向皆通过 d 点，并设 τ 在 y 轴方向的分量 τ_y 沿 ab 均匀分布，如图 5－30 所示。根据这一假设及前述的推导方法，仍可引用公式(5－17)来计算横截面上任一点处的 τ_y。经计算，在中性轴上的剪应力最大，其方向皆平行于 y 轴，其值为

$$\tau_{max}=\frac{F_S S_{zmax}^*}{I_z b}=\frac{F_S\cdot\dfrac{\pi r^2}{2}\cdot\dfrac{4r}{3\pi}}{\dfrac{\pi r^4}{4}\cdot 2r}=\frac{4}{3}\cdot\frac{F_S}{\pi r^2}$$

即

$$\tau_{max}=\frac{4}{3}\cdot\frac{F_S}{A} \tag{5-21}$$

式中的 S_{zmax}^* 为半圆面积对中性轴的静矩，$A=\pi r^2$ 为圆形截面的面积。可见，圆形截面梁横截面上的最大切应力为平均切应力 $\frac{F_S}{A}$ 的 $1\frac{1}{3}$ 倍。

圆环形截面梁的最大切应力也在中性轴上(图 5－31)，由式(5－17)算得

$$\tau_{max}=\frac{F_S}{\pi R_0 t}=2\frac{F_S}{A} \tag{5-22}$$

式中 R_0 为圆环的平均半径，$A=2\pi R_0 t$ 为圆环形截面的面积。所以，圆环形截面梁的最大切应力为平均切应力的 2 倍。

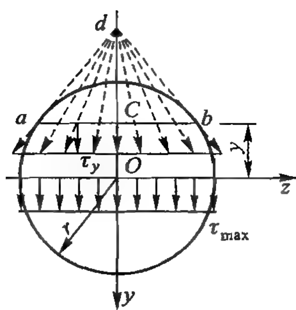


图 5－30

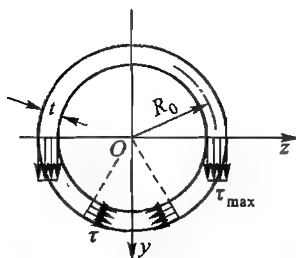


图 5－31

此外如箱形截面、T 字形截面梁等，都可以采用式(5－17)来计算其横截面上的切应力。

就整个梁而言，梁的最大切应力 τ_{max} 在最大剪力 F_{Smax} 所在的截面内，且一般在此截面的中性轴上。此处，梁的弯曲正应力 $\sigma=0$，处于纯剪切状态。因此，梁的切应力强度条件是

$$\tau_{max} = \frac{F_{Smax} S_{zmax}^*}{I_z b} \leqslant [\tau] \quad (5-23)$$

式中：S_{zmax}^*——中性轴一侧的截面面积对中性轴的静矩；

b——截面在中性轴处的宽度；

$[\tau]$——材料的许用切应力。

在梁的强度计算中，必须同时满足正应力和切应力两个强度条件。通常是先按正应力强度条件选择横截面的尺寸和形状，必要时再按切应力强度条件进行校核。一般对以下几种情况须要进行切应力强度校核：

① 若梁较短或载荷很靠近支座，这时梁的最大弯矩 M_{max} 可能很小，而最大剪力 $F_{S\,max}$ 却相对地较大，如果据此时的 M_{max} 来选择截面尺寸，就不一定能满足切应力强度条件。

② 对于一些组合截面梁，如其腹板的宽度 b 相对于截面高度很小时，横截面上可能产生较大的切应力。

③ 对于木梁，它在顺纹方向的抗剪能力较差，而由切应力互等定理，在中性层上也同时有 τ_{max} 作用，因而可能沿中性层发生剪切破坏，所以需要校核其切应力强度。

例 5-8 一外伸梁如图 5-32a 所示，已知 $F=50$ kN，$a=0.15$ m，$l=1$ m；梁由工字钢制成，材料的许用弯曲应力 $[\sigma]=160$ MPa，许用切应力 $[\tau]=100$ MPa，试选择工字钢的型号。

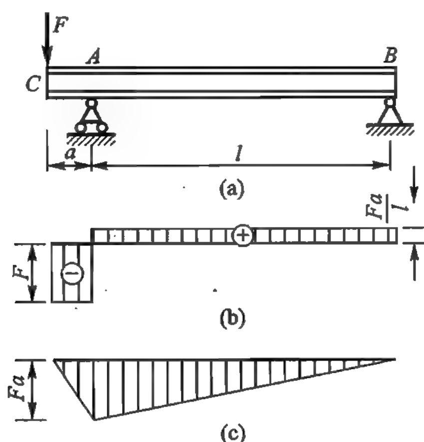


图 5-32

解：此梁的载荷比较靠近支座，故其弯矩较小，剪力则相对地较大，且工字钢的腹板比较狭窄，因此，除考虑正应力强度外，还需校核梁的切应力强度。

(1) 作剪力图和弯矩图　梁的剪力图和弯矩图如图 5-32b、c 所示，得：

$$|F_S|_{max} = F = 50 \text{ kN}$$

$$|M|_{max} = Fa = 50 \text{ kN} \times 0.15 \text{ m} = 7.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

(2) 选择截面　由正应力强度条件式(5-14)

$$W_z = \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{7.5\times10^3\ \text{N}\cdot\text{m}}{160\times10^6\ \text{N/m}^2} = 46.8\times10^{-6}\text{m}^3$$

查型钢规格表,选用 10 工字钢,其 $W_z = 49\times10^{-6}\ \text{m}^3$。

(3)校核切应力强度　由式(5－23),

$$\tau_{max} = \frac{F_{Smax}S^*_{zmax}}{I_z d}$$

自型钢表查得:

$$\frac{I_z}{S^*_z} = 85.9\ \text{mm},\quad d = 4.5\ \text{mm}$$

故

$$\tau_{max} = \frac{50\times10^3\text{N}}{(85.9\times10^{-3}\ \text{m})\times(4.5\times10^{-3}\ \text{m})} = 130\times10^6\text{Pa} = 130\ \text{MPa} > 100\ \text{MPa} = [\tau]$$

不满足切应力强度条件,须重新选择截面。

(4)重新选择截面　在原计算基础上适当加大截面,改选 12.6 工字钢,再校核其切应力强度。自型钢表查得:

$$\frac{I_z}{S^*_z} \approx 108\ \text{mm},\quad d = 5\ \text{mm}$$

则

$$\tau_{max} = \frac{F_{S\,max}S^*_z}{I_z d} = \frac{50\times10^3\ \text{N}}{(108\times10^{-3}\text{m})\times(5\times10^{-3}\text{m})} = 92.7\times10^6\ \text{Pa}$$

$$= 92.7\ \text{MPa} < 100\ \text{MPa} = [\tau]$$

满足切应力强度条件,最后选用 12.6 工字钢。

例 5－9　试校核例 5－7 中 T 形截面铸铁梁的切应力。设材料的许用切应力 $[\tau] = 0.8[\sigma_t]$,$[\sigma_t]$为许用拉应力。

解:

(1)作剪力图　梁的剪力图如图 5－19b 所示,AC 段的剪力最大,为

$$F_{Smax} = 14\ \text{kN}$$

(2) 确定许用切应力　在上题中已得材料的许用拉应力 $[\sigma_t] = 60\ \text{MPa}$,故梁的许用切应力为

$$[\tau] = 0.8[\sigma_t] = 0.8\times60\ \text{MPa} = 48\ \text{MPa}$$

(3)校核切应力　对 T 形截面梁,可直接引用式(5－19)。最大切应力位于中性轴上,其计算式为

$$\tau_{max} = \frac{F_{Smax}S^*_{z\,max}}{I_z b}$$

式中,$b = 20\ \text{mm}$,$I_z = 5.33\times10^6\ \text{mm}^4$,$S^*_{z\,max}$为中性轴任一侧截面对中性轴的静矩,取下侧截面(图 5－19a 中阴影部分)计算较简,得

$$S^*_{z\,max} = (20\times10^{-3}\ \text{m})\times(80\times10^{-3}\text{m})\times\left(\frac{80\times10^{-3}\ \text{m}}{2}\right) = 64\times10^{-6}\ \text{m}^3$$

将各值代入上式,得

$$\tau_{max} = \frac{(14\times10^3\ \text{N})\times(64\times10^{-6}\text{m}^3)}{(5.33\times10^{-6}\text{m}^4)\times(20\times10^{-3}\ \text{m})}$$

$$=8.4\times10^{6}\ \text{Pa}=8.4\ \text{MPa}<[\tau]=48\ \text{MPa}$$

结果说明,梁的切应力远小于许用切应力,强度足够。实际上,此梁载荷并不靠近支座,腹板宽度相对于截面高度也不很小,故根据正应力要求选定的截面不可能产生很大的切应力。

小　结

1. 梁横截面上存在两种应力——正应力和切应力。一般情况下,正应力是支配梁强度计算的主要因素。只有在某些特殊情况下,才须进行切应力强度校核。因此,弯曲正应力及其强度计算是本章讨论的重点。

2. 推导弯曲正应力公式的方法,与轴向拉压正应力公式和扭转切应力公式的推导方法相同,综合考虑了变形几何关系、物理关系和静力学关系三个方面。本章又一次运用了这个材料力学分析问题的重要方法。

3. 梁弯曲时的曲率公式$\dfrac{1}{\rho}=\dfrac{M}{EI_z}$是梁弯曲变形的基本公式。是下一章研究梁变形计算的基础。可将其与轴向拉压和扭转时单位长度的变形公式作一类比:

$$\varepsilon=\frac{F_N}{EA},\varphi=\frac{T}{GI_p},\quad \frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI_z}$$

以上各式形式相同,都表明杆件单位长度的变形$\left(\varepsilon、\varphi、\dfrac{1}{\rho}\right)$与杆件横截面上的内力($F_N$、$T$、$M$)成正比,与杆的刚度($EA$、$GI_p$、$EI_z$)成反比。

4. 梁弯曲时的正应力公式及其强度条件是:

$$\sigma=\frac{My}{I_z},\qquad \sigma_{max}=\frac{M_{max}}{W_z}\leqslant[\sigma]$$

在使用这些公式时应明确以下几点:

(1) 公式的适用条件是:均匀连续、拉伸或压缩时的弹性模量相同的材料、服从胡克定律、小变形的对称弯曲的梁。

(2) 横截面上的正应力沿截面高度方向呈线性分布,在中性轴处的正应力为零,在上、下边缘处的正应力最大;

(3) 中性轴通过横截面的形心;

(4) 中性轴的上、下两侧截面分别受拉和受压,应力的正负号(拉或压)可直接根据梁的变形或弯矩的方向来确定。

5. 上述的曲率公式和正应力公式是弯曲理论中的主要公式,可将二者合写为一个公式:

$$\frac{\sigma}{y}=\frac{M}{I_z}=\frac{E}{\rho}$$

由此更便于看出各量间的相互联系。

6. 梁弯曲时的切应力公式及其强度条件是：

$$\tau=\frac{F_S S_z^*}{I_z b},\qquad \tau_{max}=\frac{F_{Smax}S_{z\,max}^*}{I_z b}\leqslant[\tau]$$

使用这两个公式时应注意：

(1) 矩形截面梁横截面上的切应力沿截面高度方向呈二次抛物线分布，在中性轴上的切应力最大；

(2) S_z^* 和 $S_{z\,max}^*$ 为部分截面对中性轴的静矩，而 I_z 则是整个截面对中性轴的惯性矩。

7. 强度分析的步骤

(1) 外力分析：列平衡方程，求支座反力，并校核计算结果。

(2) 内力分析：画内力图，确定最大弯矩所在截面、最大弯矩值及正负号。如果需要进行梁的切应力强度分析时，确定最大剪力所在截面及最大剪力值。校核内力计算结果。

(3) 弯矩正应力强度分析的关键是正确判断可能的危险截面及危险点。

对于塑性材料的等截面梁，危险截面在产生最大弯矩的截面，可能的危险点在危险截面的边缘处（参见例 5－3 及例 5－4）。

对于脆性材料的等截面梁，可能的危险截面在最大正弯矩和最大负弯矩所在截面，可能的危险点在危险截面的上、下两边缘处，对这些危险点进行强度分析（参考例 5－7）。

对于复杂情况，需要综合考虑弯矩、截面形状及尺寸（如变截面梁）、材料性能（如拉、压许用应力不同）等因素，确定可能的危险点位置，逐个对可能的危险点进行强度分析。

判断应力正负号时，主要采用直观的方法，对弯矩 M 及中性轴至边缘的距离 y 均取绝对值，以中性层为界，梁在凸出一侧受拉，凹入一侧受压。

(4) 本章计算题主要类型：弯曲正应力强度分析，尤其是铸铁梁等脆性材料的强度分析。

强度分析可分为以下三种类型：

a. 强度校核：$\sigma_{max}=\dfrac{M_{max}}{W_z}\leqslant[\sigma]$（参见例 5－5 及例 5－7）；

b. 截面设计：$\dfrac{M_{max}}{[\sigma]}\leqslant W_z$，从而设计截面尺寸（参见例 5－3 及例 5－4）；

c. 确定许用载荷：$M_{max}\leqslant[\sigma]W_z$，由 M_{max} 确定许用载荷（参见例 5－5）。



思考题

5－1 惯性矩及抗弯截面系数各表示什么特性？试计算图 5－33 所示各截面对中

性轴 z 的惯性矩 I_z 及抗弯截面系数 W_z。

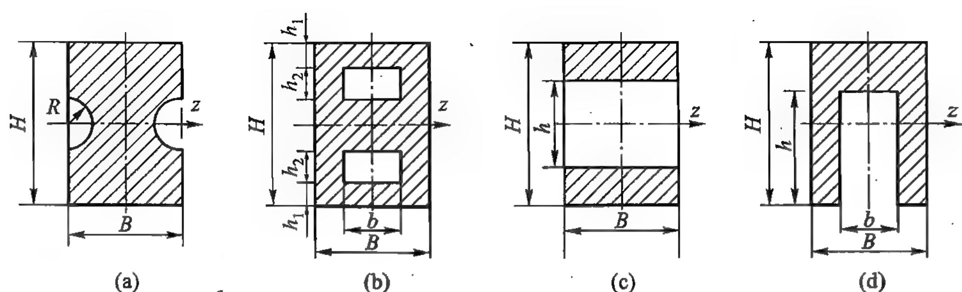


图 5－33

5－2 梁具有图 5－34 所示几种形状的横截面，若在对称弯曲下，受正弯矩作用，试分别画出各横截面上的正应力沿其高度的变化图。

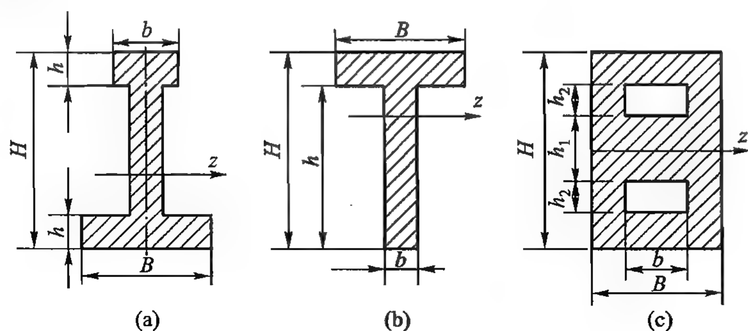


图 5－34

5－3 在平行移轴公式 $I_{z1}=I_z+a^2A$ 中，z 轴和 z_1 轴互相平行，则 z 轴通过______。

5－4 梁的抗弯刚度 EI_z 具有什么物理意义？它与抗弯截面系数 W_z 有什么区别？

5－5 试画出图 5－35 所示二梁各截面上弯矩的转向，指明哪部分截面受拉，哪部分截面受压，并画出其截面上的正应力分布图。

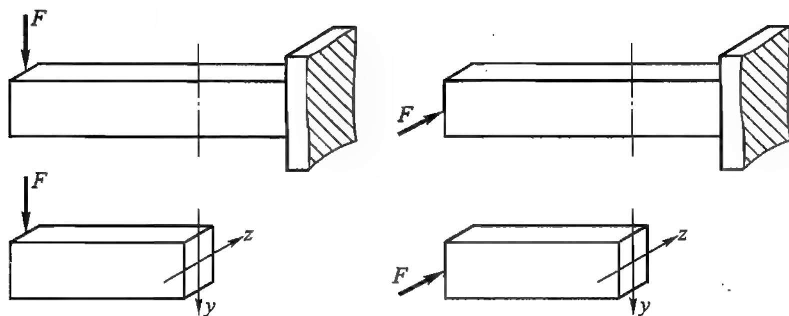


图 5－35

5－6 在下列几种情况下，一 T 字形截面的灰铸铁梁，是正置还是倒置好？并指出危险

点的可能位置。

(1) 全梁的弯矩 $M>0$;

(2) 全梁的弯矩 $M<0$;

(3) 全梁有 $M_1>0$ 和 $M_2<0$,且 $|M_2|>M_1$。

5-7 图 5-36 所示矩形截面梁,试写出 A、B、C、D 各点正应力及切应力计算公式。试问哪些点有最大正应力?哪些点有最大切应力?

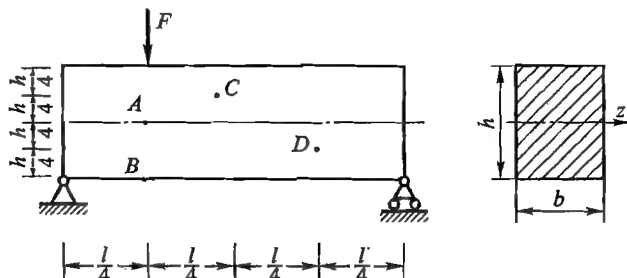


图 5-36

5-8 图 5-37 所示工字形截面梁,应分别在哪些截面上作正应力及切应力强度校核?为什么?

5-9 简支梁在中点 C 处受横向集中力 F 作用,梁的截面为矩形,截面宽度 b 沿梁长不变,截面高度 h 沿梁长线性变化,如图 5-38 所示,试确定梁的危险截面位置。

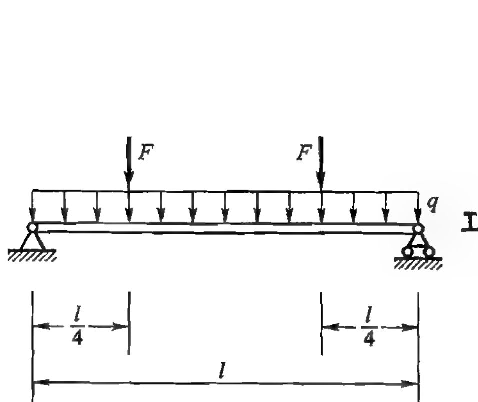


图 5-37

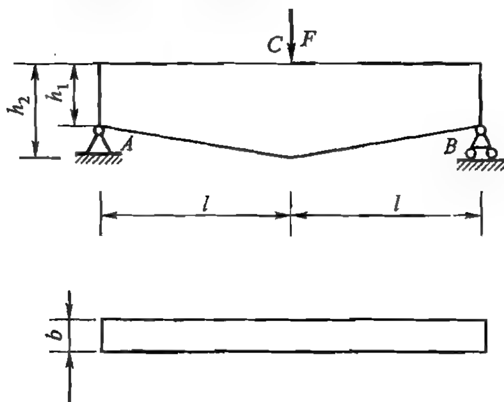


图 5-38

5-10 长 4 m 的简支梁受垂直向下的均布载荷 q 作用,梁截面如图 5-39 所示,形心为 C,$I_z=5.33\times10^{-6}\ \text{m}^4$。材料的许用拉应力 $[\sigma_t]=80$ MPa,许用压应力 $[\sigma_c]=160$ MPa,则梁的最大许用载荷 q_{max} 等于下列答案中的哪一个?

A. 5.33 kN/m

B. 4.28 kN/m

C. 3.56 kN/m

D. 6.83 kN/m

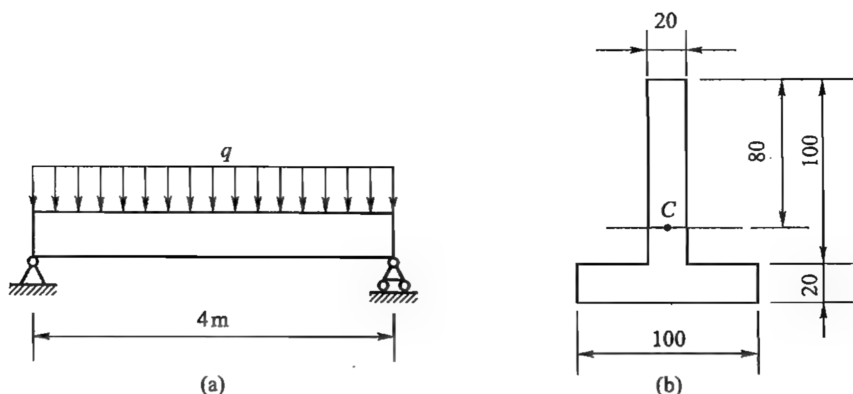


图 5－39

5－11 矩形截面的悬臂梁，载荷情况如图 5－40 所示，$M_e = Fl$。以下结论中哪些是错误的？

A. $\sigma_A = 0$

B. $\sigma_B = 0$

C. $\sigma_C = 0$

D. $\sigma_D = 0$

E. $\sigma_E \neq 0$

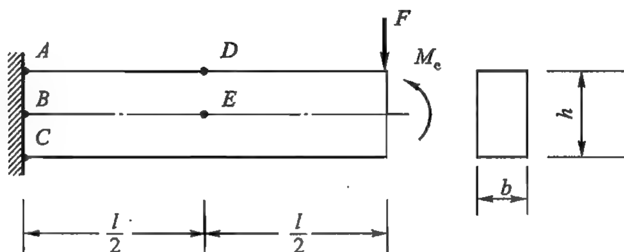


图 5－40

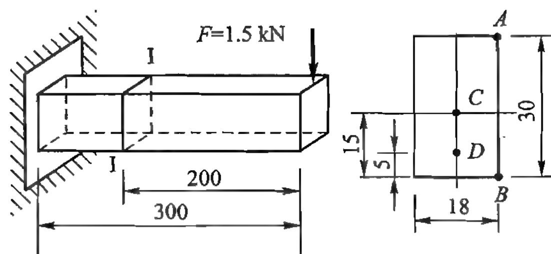
5－12 “工字形截面梁的腹板承担了大部分正应力，而其翼缘承担了大部分的剪应力”是否正确？

 习　题

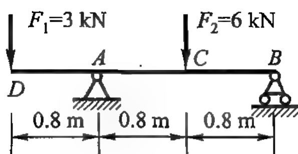
5－1 一矩形截面梁如图所示，试计算 I－I 截面上 A、B、C、D 各点处的正应力，并指明是拉应力还是压应力。

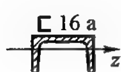
5－2 一外伸梁如图所示，梁为 16a 槽钢所制成，试求梁的最大拉应力和最大压应力，并指出其所作用的截面和位置。

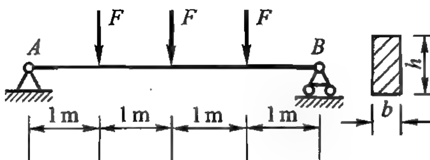
5－3 一矩形截面梁如图所示，已知 $F = 2\text{kN}$，横截面的高宽比 $h/b = 3$；材料为松木，其许用应力为$[\sigma] = 8\text{MPa}$。试选择横截面的尺寸。



题 5－1 图

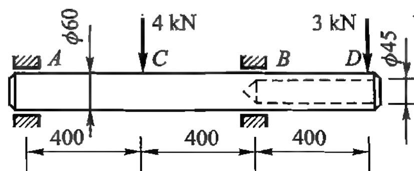






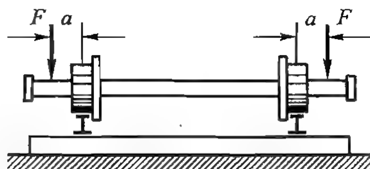
题 5－2 图　　　　　　　　　　　　　　题 5－3 图

5－4　一圆轴如图所示，其外伸部分为空心管状，试作弯矩图，并求轴内的最大正应力。



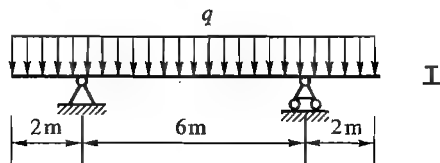
题 5－4 图

5－5　一矿车车轴如图所示。已知 $a=0.6$ m，$F=5$ kN，材料的许用应力$[\sigma]=80$ MPa，试选择车轴轴径。



题 5－5 图

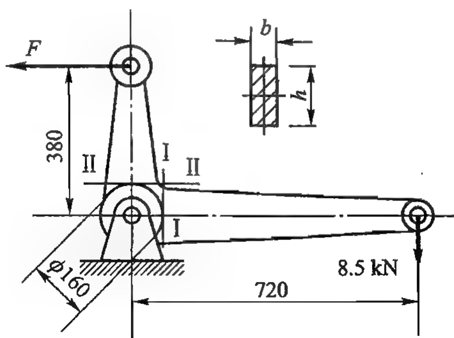
5－6　一受均布载荷的外伸钢梁如图所示，已知 $q=12$ kN/m，材料的许用应力$[\sigma]=160$ MPa。试选择此梁的工字钢型号。



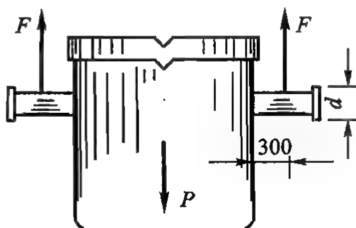
题 5－6 图

5-7 图示的空气泵的操纵杆,右端受力为 8.5 kN,截面 I-I 和 II-II 为矩形,其高宽比均为 $h/b=3$,材料的许用应力$[\sigma]=50$ MPa。试求此二截面所需的尺寸。

5-8 图示为一铸造用的钢水包。试按其耳轴的正应力强度确定充满钢水时所允许的总重量。已知材料的许用应力$[\sigma]=100$ MPa,$d=200$ mm。

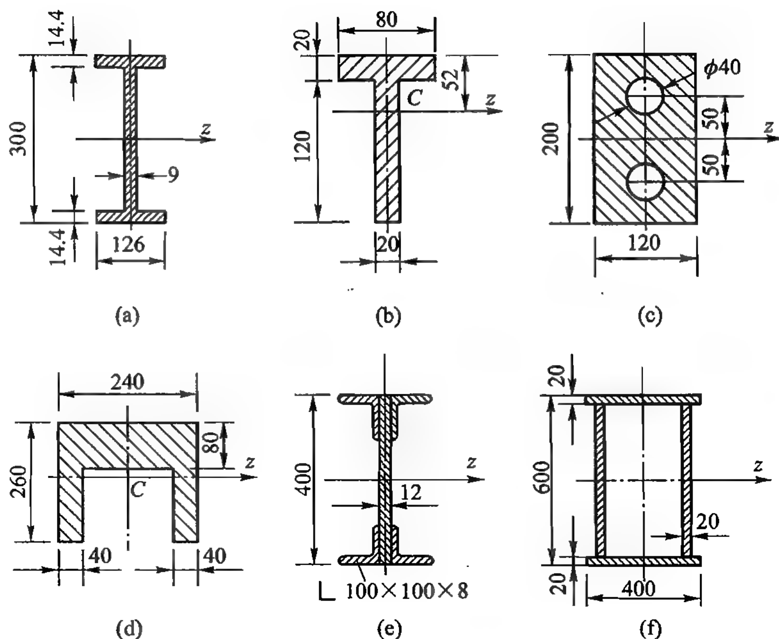


题 5-7 图



题 5-8 图

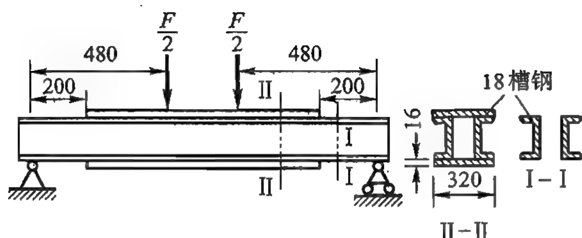
5-9 求以下各图形对形心轴 z 的惯性矩。



题 5-9 图

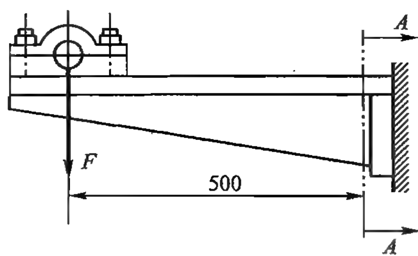
5-10 横梁受力如图所示。已知 $F=97$ kN,许用应力$[\sigma]=32$ MPa。试校核其强度。

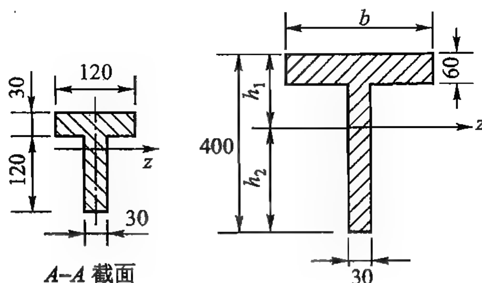
5-11 铸铁轴承架尺寸如图所示,受力 $F=16$ kN。材料的许用拉应力$[\sigma_t]=30$ MPa,许用压应力$[\sigma_c]=100$ MPa。试校核截面 $A-A$ 的强度,并画出其正应力分布图。



题 5－10 图

5－12 铸铁 T 形截面梁如图所示。设材料的许用拉应力与许用压应力之比为$\dfrac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]}=\dfrac{1}{3}$,试确定翼缘的合理宽度 b。

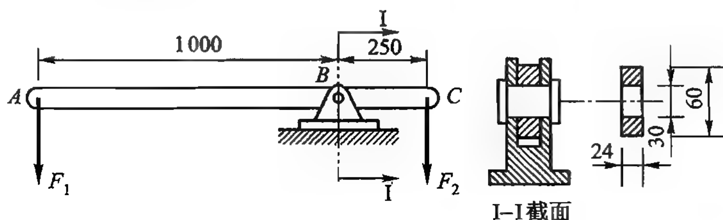




题 5－11 图　　　　题 5－12 图

5－13 试求题 5－1 中截面 I－I 上 A、B、C、D 各点处的切应力。

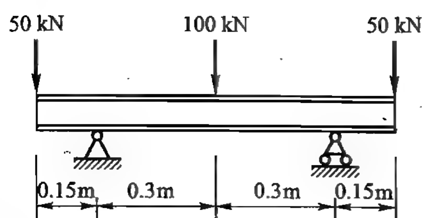
5－14 制动装置的杠杆,在 B 处用直径 $d=30$ mm 的销钉支承。若杠杆的许用应力$[\sigma]=140$ MPa,销钉的许用切应力$[\tau]=100$ MPa,试求许用载荷 F_1 和 F_2。



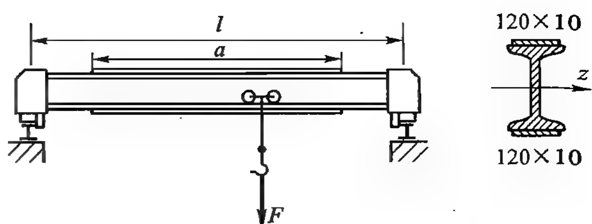
题 5－14 图

5－15 由工字钢制成的外伸梁如图所示。设材料的弯曲许用应力$[\sigma]=160$ MPa,许用切应力$[\tau]=100$ MPa,试选择工字钢的型号。

5－16 一单梁吊车由 40a 工字钢制成,在梁中段的上下翼缘上各加焊了一块 $120\times10\ \text{mm}^2$的盖板,如图所示。已知梁跨长 $l=8$ m,$a=5.2$ m,材料的弯曲许用应力$[\sigma]=140$ MPa,许用切应力$[\tau]=80$ MPa。试按正应力强度条件确定梁的许用载荷$[F]$,并校核梁的切应力。梁的自重暂不考虑。



题 5－15 图



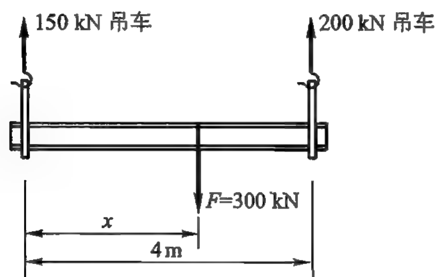
题 5－16 图

5－17　某车间用一台 150 kN 的吊车和一台 200 kN 的吊车，借一辅助梁共同起吊一重量 $F=300$ kN 的设备，如图所示。

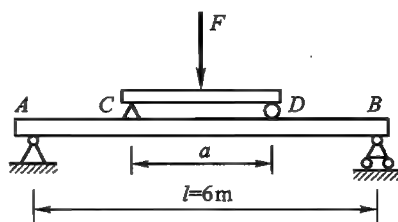
(1) 重量距 150 kN 吊车的距离 x 应在什么范围内，才能保证两台吊车都不致超载；

(2) 若用工字钢作辅助梁，试选择工字钢的型号。已知许用应力$[\sigma]=160$ MPa。

5－18　图示简支梁 AB，若载荷 F 直接作用于梁的中点，梁的最大正应力超过了许可值的 30%。为避免这种过载现象，配置了副梁 CD，试求此副梁所需的长度 a。



题 5－17 图



题 5－18 图

第六章 弯曲变形 静不定梁

§6-1 工程实际中的弯曲变形问题

为保证弯曲构件正常地工作，不但要求构件有足够的强度，在某些情况下，还要求它们有足够的刚度。否则，尽管构件的强度足够，也往往由于变形过大而使其不能正常地工作。例如，桥式起重机大梁，在起吊重物后若其弯曲变形过大，就会使起重机在运行时产生很大的振动，破坏工作的平稳性。钢板轧机在轧制过程中，轧辊会因板坯的反作用力而产生弯曲变形（图 6-1），如轧辊的变形过大，将造成钢板沿宽度方向的厚度不匀，影响产品的质量。又如图 6-2a 所示的齿轮轴，在啮合力作用下所产生的弯曲变形如果过大（图 6-2b），就会造成齿轮间的啮合不良，同时还会使轴与轴承的配合不好。其结果是传动不平稳，齿轮、轴承或轴的磨损加快，降低了使用寿命。因此必须限制构件的弯曲变形。但是事物都是一分为二的，在某些情况下，也可以利用构件的弯曲变形来为生产服务。例如汽车轮轴上的叠板弹簧（图 6-3）就是利用其弯曲变形来缓和车辆受到的冲击和振动，这时就要求弹簧有较大的变形了。

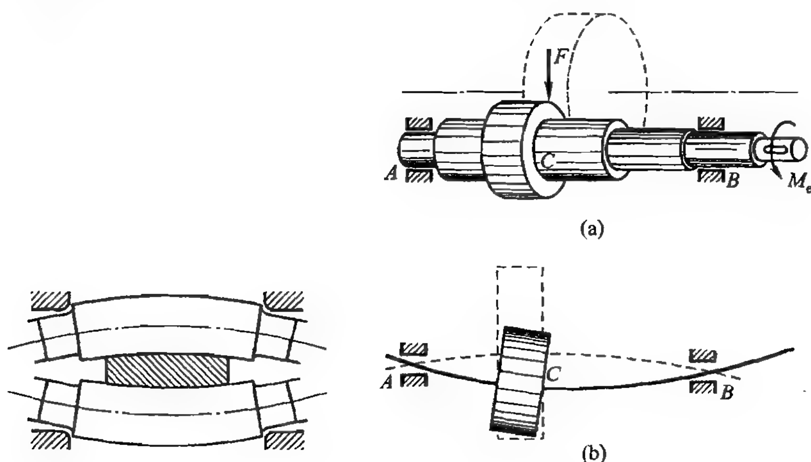


图 6-1　　图 6-2

此外，在求解静不定梁的问题时，也需要考虑梁的变形条件。

根据工程实际中的需要，为了限制或利用弯曲构件的变形，必须研究梁的变形规律。本章讨论对称弯曲时梁的变形问题。

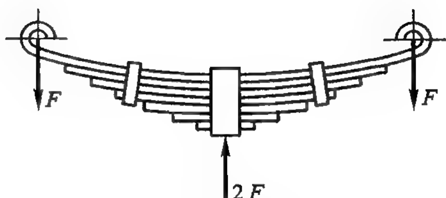


图 6－3

§6－2 梁的挠曲线近似微分方程

1. 挠度和转角

为研究梁的变形，首先讨论如何度量和描述弯曲变形的问题。

设有一梁 AB，受载荷作用后其轴线将弯曲成为一条光滑的连续曲线 AB'（图 6－4）。在对称弯曲的情况下，这是一条位于载荷所在平面内的平面曲线。梁弯曲后的轴线称为挠曲线。

与此同时，梁将产生两种形式的位移。

（1）线位移

梁轴线上的任一点 C（即梁横截面的形心）在梁变形后将移至 C'，因而有线位移 CC'。由于梁的变形很小，C 点沿变形前梁轴方向的位移可以忽略，因此可以认为 CC' 垂直于梁变形前的轴线 AB。梁轴线上的一点在垂直于梁变形前轴线方向的线位移称为该点的挠度。例如图 6－4 中的 w_C 即为 C 点的挠度。

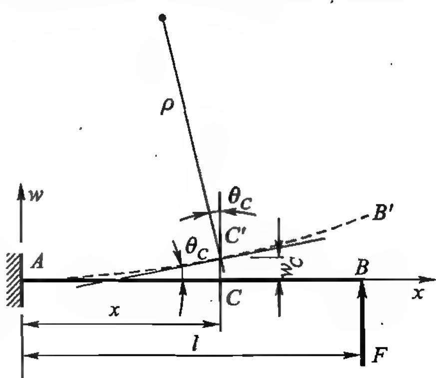


图 6－4

（2）角位移

梁变形时，其横截面形心不仅有线位移，而且，整个横截面还将绕其中性轴转动一个角度，因而又有角位移。梁任一横截面绕其中性轴转动的角度称为该截面的转角。例如图 6－4 中的 θ_C 即为截面 C 的转角。

在工程实际中，挠度和转角是度量梁弯曲变形的两个基本量。

为描述梁的变形，取一个直角坐标系，以梁的左端为原点，令 x 轴与梁变形前的轴线重合，方向向右；w 轴铅垂向上为正。这样，变形后梁轴线上任一点的挠度就可以用 w 来表示；由于梁横截面变形后仍垂直于梁的轴线，因此任一横截面的转角 θ，也可用截面形心处挠曲线的切线与 x 轴的夹角来表示。

挠度 w 和转角 θ 是随截面的位置 x 而变的，即 w 和 θ 均为 x 的函数。因此，梁的挠曲线可以用函数关系

$$w = f(x) \tag{a}$$

来表示。这个函数关系称为梁的挠曲线方程。由微分学知，过挠曲线上任意点的切线与 x 轴夹角的正切就是挠曲线上该点的斜率，即

$$\tan\ \theta = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = w' \tag{b}$$

由于工程实际中常见梁的转角 θ 一般都很小，故

$$\tan\ \theta \approx \theta$$

由式(b)，因而可以认为

$$\theta = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = w' \tag{6-1}$$

可见梁的挠度 w 与转角 θ 之间存在一定的关系，即梁任一横截面的转角 θ 等于该截面处挠度 w 对 x 的一阶导数。这样，只要能知道梁的挠曲线方程，就可以确定梁轴线上任一点的挠度和任一横截面的转角。

挠度 w 和转角 θ 的正负号，根据所选取的坐标系而定。与 w 轴正方向一致的挠度为正，反之为负；挠曲线上某点处的斜率为正时，则该处横截面的转角为正，反之为负。因此，在图 6-4 所选定的坐标系中，挠度向上时为正，向下时为负；转角逆时针转向时为正，顺时针转向时为负。

2. 挠曲线的近似微分方程

在第五章推导梁的正应力公式时已经得到，梁弯曲后的曲率与弯矩和抗弯刚度之间的关系[式(5-2)]为

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

为建立梁的挠曲线方程，可由这一关系出发来推导。这个公式是在梁处于纯弯曲状态下得出的，但也可推广于非纯弯曲的情况。因为一般梁的横截面高度 h 远小于其跨度 l，在此情况下，剪力对梁变形的影响很小，可以忽略不计(例如，矩形截面的悬臂梁，自由端受集中载荷作用，当梁横截面高与梁长之比 $h/l = \frac{1}{10}$ 时，因剪力而产生的挠度不超过因弯矩而产生的挠度的1%)。对于非纯弯曲的梁。弯矩 M 是随截面的位置而变的，它是 x 的函数；同样梁变形后的曲率半径也是 x 的函数。因此，这时上式应改为

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EI} \tag{c}$$

由此式出发，可建立梁的挠曲线方程，从而可求梁的挠度和转角。

由高等数学知，平面曲线 $w = f(x)$ 上任一点处的曲率为

$$\frac{1}{\rho(x)} = \pm \frac{\dfrac{d^2 w}{dx^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dw}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \tag{d}$$

将其用于描述梁的挠曲线，代入式(c)，得

$$\pm \frac{\dfrac{d^2 w}{dx^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dw}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{M(x)}{EI} \tag{6-2}$$

式(6-2)称为梁的挠曲线微分方程，这是一个二阶非线性常微分方程，求解较难。但因在工程实际中，梁的变形一般都很小，挠曲线为一平坦的曲线，dw/dx 为一很小的量，故 $(dw/dx)^2$ 与 1 相比可以忽略不计，因而上式可简化为

$$\pm \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \tag{e}$$

上式左边的正负号取决于弯矩正负号的规定及坐标系的选取。如弯矩的正负号仍按以前的规定(§4-2)，并取 w 轴向上，则应取正号。因为当弯矩 $M(x)$ 为正时，将使梁的挠曲线呈凹形，由微分学知，此时 d^2w/dx^2 在所选取的坐标系中也为正值(图 6-5a)；同样，当 $M(x)$ 为负时，挠曲线呈凸形，d^2w/dx^2 也为负值(图 6-5b)，二者的正负号皆相同，故式(e)可表示为

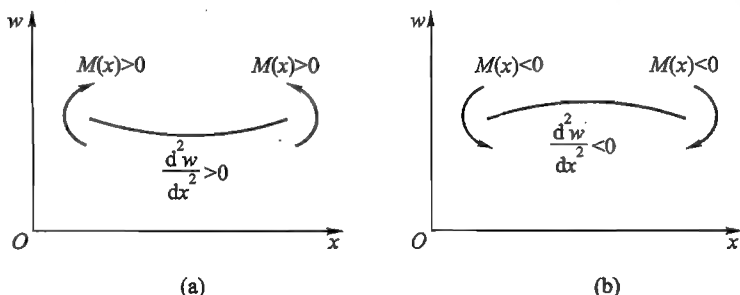


图 6-5

$$w'' = \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \tag{6-3}$$

式(6-3)称为梁的挠曲线近似微分方程。其所以说近似，是因为略去了剪力对变形的影响，并在式(6-2)中略去了 $(dw/dx)^2$。实践表明，根据这一公式所得的结果在工程应用中是足够精确的。

在土建类教材中，选择 w 轴铅垂向下为正。在式(6-3)中右边应取负号。

§6-3 用积分法求梁的变形

上节得到的是梁的挠曲线近似微分方程，为求得梁的挠曲线方程，还须对这个微分方程进行积分。

对于等截面直梁，EI 为常数，挠曲线近似微分方程(6-3)又可改写为

$$EIw'' = M(x) \tag{6-4}$$

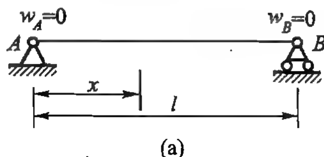
将此式两边各乘以 dx，积分一次，得

$$EIw' = EI\theta = \int M(x)\,dx + C \tag{6-5}$$

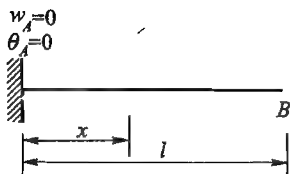
再积分一次，又得

$$EIw = \iint M(x)\,dx\,dx + Cx + D \tag{6-6}$$

上二式中的积分常数 C 和 D，可通过梁支承处或某些截面的已知位移条件来确定，这些条件称为**边界条件**。例如简支梁在两端支座处的挠度为零(图6-6a)，即在 $x=0$ 处，$w_A=0$；在 $x=l$ 处，$w_B=0$。又如悬臂梁固定端的挠度和转角均为零(图6-6b)，即在 $x=0$ 处，$w_A=0$ 和 $\theta_A=0$。将这些已知的边界条件代入式(6-5)和(6-6)，即可确定 C 和 D。将已确定的积分常数代回式(6-5)和式(6-6)，就可得到梁的转角方程和挠曲线方程(即挠度方程)，从而可确定梁任意截面的转角或挠度。



(a)



(b)

图6-6

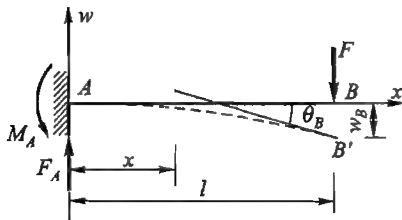


图6-7

上述求梁变形的方法，通常称为**积分法**。下面通过例题说明。

例6-1 一悬臂梁 AB，在自由端 B 作用一集中力 F，如图6-7所示。试求梁的转角方程和挠度方程，并确定最大转角 $|\theta|_{max}$ 和最大挠度 $|w|_{max}$。

解：以梁左端 A 为原点，取一直角坐标系，令 x 轴向右，w 轴向上。

(1) 列弯矩方程　在距原点 x 处取截面，列出弯矩方程为

$$\begin{aligned} M(x) &= -F(l-x) \\ &= -Fl+Fx \end{aligned} \tag{a}$$

(2) 列挠曲线近似微分方程并积分　将弯矩方程代入式(6－4)。

$$EIw'' = -Fl + Fx \tag{b}$$

通过两次积分，得：

$$EIw' = -Flx + \frac{F}{2}x^2 + C \tag{c}$$

$$EIw = -\frac{Fl}{2}x^2 + \frac{F}{6}x^3 + Cx + D \tag{d}$$

(3) 确定积分常数　悬臂梁在固定端处的挠度和转角均为零，即：

在 $x=0$ 处，

$$\theta_A = w_A' = 0 \tag{e}$$

$$w_A = 0 \tag{f}$$

将这两个边界条件代入式(c)和式(d)，得：

$$C=0, D=0$$

(4) 建立转角方程和挠度方程　将求得的积分常数 C 和 D 代入式(c)和式(d)，得梁的转角方程和挠度方程分别为：

$$\theta = w' = \frac{1}{EI}\left(-Flx + \frac{F}{2}x^2\right) = -\frac{Fx}{2EI}(2l-x) \tag{g}$$

$$w = \frac{1}{EI}\left(-\frac{Fl}{2}x^2 + \frac{F}{6}x^3\right) = -\frac{Fx^2}{6EI}(3l-x) \tag{h}$$

(5) 求最大转角和最大挠度　由图 6－7 可以看出，自由端 B 处的转角和挠度绝对值最大。以 $x=l$ 代入式(g)和式(h)，可得：

$$\theta_B = -\frac{Fl^2}{2EI}, \text{即} |\theta|_{max} = \frac{Fl^2}{2EI}$$

$$w_B = -\frac{Fl^3}{3EI}, \text{即} |w|_{max} = w|_{x=l} = \frac{Fl^3}{3EI}$$

所得的 θ_B 为负值，说明横截面 B 作顺时针方向转动；w_B 为负值，说明截面 B 的挠度向下。

例 6－2　一简支梁如图 6－8 所示，在全梁上受集度为 q 的均布载荷作用。试求此梁的转角方程和挠度方程，并确定最大转角 $|\theta|_{max}$ 和最大挠度 $|w|_{max}$。

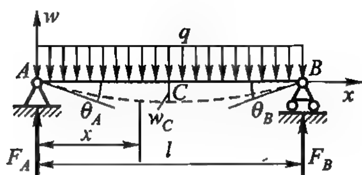


图 6－8

解：

(1) 列弯矩方程　由对称关系得梁的两个支座反力为

$$F_A = F_B = \frac{ql}{2}$$

以 A 为原点，取坐标如图，列出梁的弯矩方程为

$$M(x) = \frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2 \tag{a}$$

(2) 列挠曲线近似微分方程并积分　将式(a)代入式(6－4)

$$EIw'' = \frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2 \tag{b}$$

通过两次积分，得：

$$EIw' = \frac{ql}{4}x^2 - \frac{q}{6}x^3 + C \tag{c}$$

$$EIw = \frac{ql}{12}x^3 - \frac{q}{24}x^4 + Cx + D \tag{d}$$

(3) 确定积分常数　简支梁的边界条件是：在两支座处的挠度等于零，即

$$在\ x = 0\ 处, w_A = 0 \tag{e}$$

$$在\ x = l\ 处, w_B = 0 \tag{f}$$

将式(e)代入式(d)，得

$$D = 0$$

再将式(f)代入式(d)，得

$$w_B = \frac{q}{12}l^4 - \frac{q}{24}l^4 + Cl = 0$$

由此解出

$$C = -\frac{ql^3}{24}$$

(4) 建立转角方程和挠度方程　将积分常数 C、D 代入式(c)和(d)，得：

$$\theta = w' = \frac{1}{EI}\left(\frac{ql}{4}x^2 - \frac{q}{6}x^3 - \frac{ql^3}{24}\right) = -\frac{q}{24EI}(l^3 - 6lx^2 + 4x^3) \tag{g}$$

$$w = \frac{1}{EI}\left(\frac{ql}{12}x^3 - \frac{q}{24}x^4 - \frac{ql^3}{24}x\right) = -\frac{qx}{24EI}(l^3 - 2lx^2 + x^3) \tag{h}$$

(5) 求最大转角和最大挠度　梁上载荷和边界条件均对称于梁跨中点 C，故梁的挠曲线也必对称。由此可知，最大挠度必在梁的中点处，以 $x = \frac{l}{2}$ 代入式(h)，得

$$w_C = -\frac{q \cdot \frac{l}{2}}{24EI}\left(l^3 - \frac{l^3}{2} + \frac{l^3}{8}\right) = -\frac{5ql^4}{384EI}$$

故

$$|w|_{max} = \frac{5ql^4}{384EI}$$

式中负号表示梁中点的挠度向下。

又由图 6-8 可见，在两支座处横截面的转角相等，绝对值均为最大。以 $x = 0$ 和 $x = l$ 代入式(g)，得：

$$\theta_A = -\frac{ql^3}{24EI}, \theta_B = +\frac{ql^3}{24EI}$$

故

$$|\theta|_{max} = \frac{ql^3}{24EI}$$

例 6-3　一简支梁如图 6-9 所示，在 C 点处受一集中力 F 作用。试求此梁的最大转角 $|\theta|_{max}$ 和最大挠度 $|w|_{max}$。

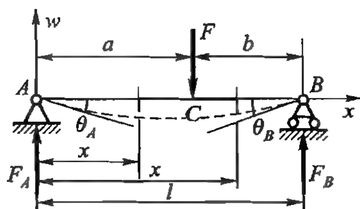


图 6-9

解：

(1) 列弯矩方程　由平衡方程$\sum M_B=0$和$\sum M_A=0$，得梁的支座反力为

$$F_A=\frac{Fb}{l},F_B=\frac{Fa}{l}$$

力F的作用点C将梁分为两段，取坐标系如图，可列出两段梁的弯矩方程为：

AC段：
$$M_1(x)=\frac{Fb}{l}x \quad (0\leqslant x\leqslant a) \tag{a_1}$$

CB段：
$$M_2(x)=\frac{Fb}{l}x-F(x-a) \quad (a\leqslant x\leqslant l) \tag{a_2}$$

(2) 列挠曲线近似微分方程并积分　因两段梁的弯矩方程不同，故梁的挠曲线近似微分方程也须分别列出，并分别积分（结果见表6-1）。

表6-1　挠曲线微分方程

AC段($0\leqslant x\leqslant a$)		CB段($a\leqslant x\leqslant l$)	
$EIw_1''=\frac{Fb}{l}x$	(b_1)	$EIw_2''=\frac{Fb}{l}x-F(x-a)$	(b_2)
$EIw_1'=\frac{Fb}{2l}x^2+C_1$	(c_1)	$EIw_2'=\frac{Fb}{2l}x^2-\frac{F}{2}(x-a)^2+C_2$	(c_2)
$EIw_1=\frac{Fb}{6l}x^3+C_1x+D_1$	(d_1)	$EIw_2=\frac{Fb}{6l}x^3-\frac{F}{6}(x-a)^3+C_2x+D_2$	(d_2)

(3) 确定积分常数　积分结果出现了四个积分常数，需要四个已知的位移条件才能确定。由于梁的挠曲线是一条光滑连续的曲线，故左、右两段梁在连接处C应有相同的转角和挠度。因此，两段梁在连接处的位移应满足条件：

在$x=a$处，
$$w_1'=w_2' \tag{e}$$
$$w_1=w_2 \tag{f}$$

这样的条件称为连续条件。式(e)表示挠曲线在C处应光滑；式(f)表示挠曲线在C处应连续。利用这两个连续条件，连同在支座A、B处的两个边界条件，即可确定四个积分常数。

由连续条件，以$x=a$代入式(c_1)、式(c_2)，并令二式相等，即

$$\frac{Fb}{2l}a^2+C_1=\frac{Fb}{2l}a^2-\frac{F}{2}(a-a)^2+C_2$$

由此得

$$C_1=C_2$$

再以$x=a$代入式(d_1)、式(d_2)，仍令二式相等，即

$$\frac{Fb}{6l}a^3+C_1a+D_1=\frac{Fb}{6l}a^3-\frac{F}{6}(a-a)^3+C_2a+D_2$$

因已知$C_1=C_2$，故由此又得

$$D_1=D_2$$

在支座A、B处的边界条件为：

在$x=0$处，
$$w_1=w_A=0 \tag{g}$$

在$x=l$处，
$$w_2=w_B=0 \tag{h}$$

以条件(g)代入式(d_1),得

$$D_1 = D_2 = 0$$

再以条件(h)代入式(d_2),得

$$\frac{Fb}{6l}l^3 - \frac{F}{6}(l-a)^3 + C_2 l = 0$$

由此解出

$$C_1 = C_2 = -\frac{Fb}{6l}(l^2 - b^2)$$

(4) 建立转角方程和挠度方程　将所求得的积分常数代入式(c_1)、式(c_2)、式(d_1)和式(d_2),得两段梁的转角方程和挠度方程(表 6-2):

表 6-2　两段梁的挠度方程

AC 段($0 \leqslant x \leqslant a$)	CB 段($a \leqslant x \leqslant l$)
$EIw_1' = -\frac{Fb}{6l}(l^2 - b^2 - 3x^2)$　(i_1)	$EIw_2' = -\frac{Fb}{6l}\left[l^2 - b^2 - 3x^2 + \frac{3l}{b}(x-a)^2\right]$　(i_2)
$EIw_1 = -\frac{Fbx}{6l}(l^2 - b^2 - x^2)$　(j_1)	$EIw_2 = -\frac{Fb}{6l} \times \left[(l^2 - b^2)x - x^3 + \frac{l}{b}(x-a)^3\right]$　(j_2)

(5) 求最大转角和最大挠度　由图 6-9 可见,梁 A 端或 B 端截面的转角可能最大。以 $x=0$ 和 $x=l$ 分别代入式(i_1)和式(i_2),得

$$\theta_A = -\frac{Fb(l^2 - b^2)}{6EIl} = -\frac{Fab(l+b)}{6EIl} \tag{k}$$

$$\theta_B = \frac{Fab(l+a)}{6EIl} \tag{l}$$

当 $a > b$ 时,绝对值最大的转角为 θ_B。

当 $a > b$ 时,显然最大挠度位于 AC 段内,设在 x_0 处的挠度最大,则该处截面的转角应为零。以 x_0 代入式(i_1),并令 $w_1' = 0$,

$$-\frac{Fb}{6l}(l^2 - b^2 - 3x_0^2) = 0$$

解得

$$x_0 = \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}} \tag{m}$$

以式(m)代入式(j_1),可得梁的最大挠度为

$$|w|_{max} = \frac{Fb}{9\sqrt{3}EIl}\sqrt{(l^2 - b^2)^3} \tag{n}$$

(6) 讨论　由式(m)可以看出,当力 F 无限靠近 B 端支座,即 $b \to 0$ 时,

$$x_0 \to \frac{l}{\sqrt{3}} = 0.577l \tag{o}$$

这说明，即使载荷非常靠近梁端支座，梁最大挠度的所在位置仍与梁的中点非常靠近。因此，为计算上的方便，可以近似地以梁中点的挠度来代替梁的实际最大挠度。现以 $x=\frac{l}{2}$ 代入式(j_1)，得梁中点处截面的挠度为

$$|w_{\frac{l}{2}}| = \frac{Fb}{48EI}(3l^2 - 4b^2) \tag{p}$$

以 $w_{\frac{l}{2}}$ 代替 w_{max} 所引起的误差不超过 3%。

当力 F 位于梁的中点，即当 $a=b=\frac{l}{2}$ 时，由式(k)、式(l)和式(n)，可得梁的最大转角和最大挠度为

$$|\theta|_{max} = -\theta_A = \theta_B = \frac{Fl^2}{16EI}$$

$$|w|_{max} = |w_{\frac{l}{2}}| = \frac{Fl^3}{48EI}$$

积分法是求梁变形的一种基本方法，其优点是可以直接运用数学方法求得梁的转角方程和挠度方程。但当只需求梁某特定截面的挠度或转角时，此法的运算过程则显得繁冗。为了应用上的方便，一般设计手册中已将常用梁的挠度和转角的有关计算公式列成表格，以备查用。表 6－3 给出了简单载荷作用下常见梁的挠度和转角。

§6－4 用叠加法求梁的变形

设一悬臂梁上同时作用有集中载荷、集中力偶和均布载荷，如图 6－10 所示。由积分法可求得其自由端截面的转角和挠度为

$$\theta_B = \frac{1}{EI}\left[-\frac{ql^3}{6} - \frac{Fl^2}{2} + M_e l\right]$$

$$w_B = \frac{1}{EI}\left[-\frac{ql^4}{8} - \frac{Fl^3}{3} + \frac{M_e l^2}{2}\right]$$

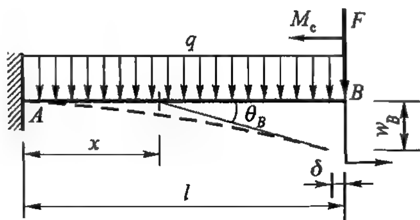


图 6－10

上二式中的各项分别为 q、F、M_e 所引起的转角和挠度，且皆与载荷成正比。这说明，当梁上同时作用有几个载荷时，可分别求出各载荷单独作用时梁的变形，然后计算其代数和，即可得到各载荷同时作用时的变形。这种方法就是叠加法。

在几个载荷共同作用下所引起的某一物理量，等于各载荷单独作用时所引起的此物理量的总和(代数和或矢量和)，称之为叠加原理。它适用范围较广泛。

叠加原理是在一定条件下才成立的。从数学关系上看，其适用条件是所求

表 6－3　简单载荷作用下梁的变形

序号	梁的简图	端截面转角	挠曲线方程	绝对值最大的挠度
1		$\theta_B = -\frac{M_e l}{EI}$	$w = -\frac{M_e x^2}{2EI}$	$w_B = -\frac{M_e l^2}{2EI}$
2		$\theta_B = -\frac{Fl^2}{2EI}$	$w = -\frac{Fx^2}{6EI}(3l - x)$	$w_B = -\frac{Fl^3}{3EI}$
3		$\theta_B = -\frac{Fc^2}{2EI}$	$0 \leqslant x \leqslant c$ $w = -\frac{Fx^2}{6EI}(3c - x)$ $c \leqslant x \leqslant l$ $w = -\frac{Fc^2}{6EI}(3x - c)$	$w_B = -\frac{Fc^2}{6EI}(3l - c)$

续表

序号	梁的简图	端截面转角	挠曲线方程	绝对值最大的挠度
4		$\theta_B = -\dfrac{ql^3}{6EI}$	$w = -\dfrac{qx^2}{24EI}(x^2 + 6l^2 - 4lx)$	$w_B = -\dfrac{ql^4}{8EI}$
5		$\theta_A = -\dfrac{M_e l}{6EI}$ $\theta_B = \dfrac{M_e l}{3EI}$	$w = -\dfrac{M_e x}{6lEI}(l^2 - x^2)$	在 $x = \dfrac{l}{\sqrt{3}}$ 处 $w = -\dfrac{M_e l^2}{9\sqrt{3}EI}$ 在 $x = \dfrac{l}{2}$ 处 $w_{\frac{l}{2}} = -\dfrac{M_e l^2}{16EI}$
6		$\theta_A = \dfrac{M_e}{6lEI}(l^2 - 3b^2)$ $\theta_B = \dfrac{M_e}{6lEI}(l^2 - 3a^2)$ $\theta_C = -\dfrac{M_e}{6lEI}$ $\times(3a^2 + 3b^2$ $- l^2)$	$0 \leqslant x \leqslant a$ $w = \dfrac{M_e x}{6lEI}(l^2 - 3b^2 - x^2)$ $a \leqslant x \leqslant l$ $w = -\dfrac{M_e(l-x)}{6lEI}[l^2 - 3a^2 - (l-x)^2]$	在 $x = \sqrt{\dfrac{l^2 - 3b^2}{3}}$ 处 $w_1 = \dfrac{M_e(l^2 - 3b^2)^{\frac{3}{2}}}{9\sqrt{3}lEI}$ 在 $x = \sqrt{\dfrac{l^2 - 3a^2}{3}}$ 处 $w_2 = -\dfrac{M_e(l^2 - 3a^2)^{\frac{3}{2}}}{9\sqrt{3}lEI}$

续表

序号	梁的简图	端截面转角	挠曲线方程	绝对值最大的挠度
7		$\theta_A = -\theta_B = -\frac{Fl^2}{16EI}$	$0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{2}$ $w = -\frac{Fx}{48EI}(3l^2 - 4x^2)$	$w_C = -\frac{Fl^3}{48EI}$
8		$\theta_A = -\frac{Fab(l+b)}{6lEI}$ $\theta_B = \frac{Fab(l+a)}{6lEI}$	$0 \leqslant x \leqslant a$ $w = -\frac{Fbx}{6lEI}(l^2 - x^2 - b^2)$ $a \leqslant x \leqslant l$ $w = -\frac{Fb}{6lEI}$ $\times \left[(l^2 - b^2)x - x^3 + \frac{l}{b}(x-a)^3\right]$	若 $a > b$，在 $x = \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}}$ 处 $w = -\frac{\sqrt{3}Fb}{27lEI}(l^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}$ 在 $x = \frac{l}{2}$ 处 $w_{\frac{l}{2}} = -\frac{Fb}{48EI}(3l^2 - 4b^2)$
9		$\theta_A = -\theta_B = -\frac{ql^3}{24EI}$	$w = -\frac{qx}{24EI}(l^3 - 2lx^2 + x^3)$	$w_C = -\frac{5ql^4}{384EI}$

续表

序号	梁的简图	端截面转角	挠曲线方程	绝对值最大的挠度
10		$\theta_A = -\dfrac{M_e l}{6EI}$ $\theta_B = \dfrac{M_e l}{3EI}$ $\theta_C = \dfrac{M_e}{3EI}(l+3a)$	$0 \leqslant x \leqslant l$ $w = -\dfrac{M_e x}{6lEI}(l^2 - x^2)$ $l \leqslant x \leqslant l+a$ $w = \dfrac{M_e}{6EI}(3x^2 - 4lx + l^2)$	在 $x = \dfrac{l}{\sqrt{3}}$ 处 $w = -\dfrac{M_e l^2}{9\sqrt{3}EI}$ $x = l + a$ 处 $w_C = \dfrac{M_e a}{6EI}(2l+3a)$
11		$\theta_A = \dfrac{Fal}{6EI}$ $\theta_B = -\dfrac{Fal}{3EI}$ $\theta_C = -\dfrac{Fa}{6EI}(2l+3a)$	$0 \leqslant x \leqslant l$ $w = -\dfrac{Fax}{6lEI}(x^2 - l^2)$ $l \leqslant x \leqslant l+a$ $w = -\dfrac{F(x-l)}{6EI}[a(3x-l)-(x-l)^2]$	在 $x = \dfrac{l}{\sqrt{3}}$ 处 $w = \dfrac{Fal^2}{9\sqrt{3}EI}$ 在 $x = l + a$ 处 $w_C = -\dfrac{Fa^2}{3EI}(l+a)$
12		$\theta_A = +\dfrac{qa^2 l}{12EI}$ $\theta_B = -\dfrac{qa^2 l}{6EI}$ $\theta_C = -\dfrac{qa^2}{6EI}(l+a)$	$0 \leqslant x \leqslant l$ $w = \dfrac{qa^2}{12EI}\left(lx - \dfrac{x^3}{l}\right)$ $l \leqslant x \leqslant l+a$ $w = -\dfrac{qa^2}{12EI}\left[\dfrac{x^3}{l} - \dfrac{(2l+a)(x-l)^3}{al} + \dfrac{(x-l)^4}{2a^2} - lx\right]$	在 $x = \dfrac{l}{\sqrt{3}}$ 处 $w = \dfrac{qa^2 l^2}{18\sqrt{3}EI}$ 在 $x = l + a$ 处 $w_C = -\dfrac{qa^3}{24EI}(3a+4l)$

物理量必须与载荷成正比关系。而使此物理量与载荷成正比关系，则要求满足下述的条件。

对于求支座反力、内力等仅使用静力平衡方程的问题，要求构件的变形很小，计算这些物理量时，可以忽略变形的影响，仍按构件变形前的原始尺寸来计算。此时由一载荷所引起的某一物理量，不受其他载荷的影响，各载荷的作用互不相干。例如图 6－10 所示的悬臂梁，忽略跨长变化时，因 F 而引起的弯矩为

$$M(x) = -F(l-x)$$

如梁为大变形，需考虑其跨长变化 δ，按变形后的跨长来计算，则上式中的 l 为 F 的函数，在同时作用有 q、M_e 等载荷的情况下，它还是 q、M_e 的函数。此时 $M(x)$ 不再与 F 成正比。

对于求构件的应力、变形等问题，因还涉及材料的应力－应变关系，故除上述小变形条件外，还要求材料服从虎克定律，否则这些物理量与载荷就不再成正比关系。例如梁的挠度和转角，只有在小变形和材料服从胡克定律的情况下，才与载荷成正比关系。

在梁上的载荷比较复杂，且单个载荷作用下梁的挠度及转角为已知或易求的情况下，用叠加法求梁的变形是比较方便的。下面举例说明。

例 6－4 一简支梁如图 6－11a 所示，在 C、D、E 处作用有集中载荷 F。求梁跨中点 C 处的挠度。

解：此题分为四段，如用积分法求解，计算过繁，现采用叠加法。

由表 6－3 第 7 栏查得，因 C 点处的载荷而引起的梁中点处的挠度(图 6－11b)为

$$w_{CF_1} = -\frac{Fl^3}{48EI}$$

自第 8 栏查得，因 E 点处的载荷而引起的梁中点处挠度(6－11c)为

$$w_{CF_2} = -\frac{Fb}{48EI}(3l^2 - 4b^2)$$

以 $b=\frac{l}{4}$ 代入，得

$$w_{CF_2} = -\frac{F\cdot\frac{l}{4}}{48EI}\left[3l^2 - 4\left(\frac{l}{4}\right)^2\right] = -\frac{11Fl^3}{768EI}$$

由对称关系，因 D 点处载荷而引起的梁中点处挠度(图 6－11d)亦与此值相同。

由叠加法可得，各载荷同时作用时梁中点 C

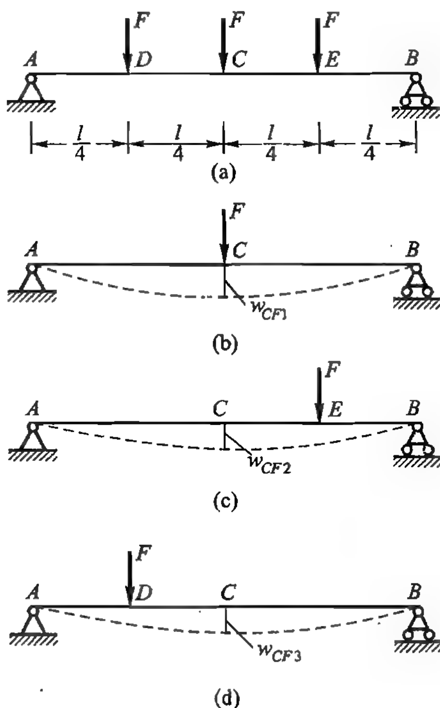


图 6－11

的总挠度为

$$w_C = w_{CF_1} + 2w_{CF_2} = -\frac{Fl^3}{48EI} - 2\times\frac{11Fl^3}{768EI} = -\frac{19Fl^3}{384EI}$$

§6-5 梁的刚度校核

在工程实际中,对弯曲构件的刚度要求是,其最大挠度或转角(或某特定截面的挠度或转角)不得超过某一规定的限度,即

$$|w|_{max} \leqslant [\delta] \tag{6-7}$$

$$|\theta|_{max} \leqslant [\theta] \tag{6-8}$$

式中:$[\delta]$——构件的许用挠度;

$[\theta]$——构件的许用转角。

以上二式称为弯曲构件的**刚度条件**。式中的许用挠度和许用转角对不同的构件有不同的规定,可从有关的设计规范中查得,例如:

对吊车梁　　$[\delta] = \left(\frac{1}{500} \sim \frac{1}{400}\right) l$

对架空管道　　$[\delta] = \frac{l}{500}$

式中的 l 为梁的跨度。在机械中,轴的许用挠度和许用转角有如下的规定:

一般用途的轴　　$[\delta] = (0.000\,3 \sim 0.000\,5) l$

刚度要求较高的轴　　$[\delta] = 0.000\,2l$

在滑动轴承处　　$[\theta] = 0.001$ rad

在向心轴承处　　$[\theta] = 0.005$ rad

在圆柱滚子轴承处　　$[\theta] = 0.002\,5$ rad

在安装齿轮处　　$[\theta] = 0.001$ rad

式中的 l 为支承间的跨距。

例 6-5　起重量为 50 kN 的单梁吊车,由 45 b 工字钢制成,其跨度 $l = 10$ m(图 6-12a)。已知梁的许用挠度 $[\delta] = \frac{l}{500}$,材料的弹性模量 $E = 210$ GPa。试校核吊车梁的刚度。

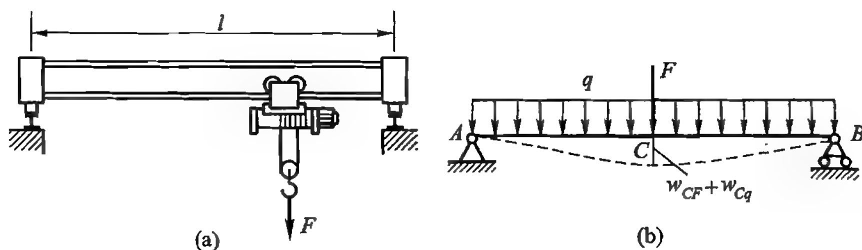


图 6-12

解:吊车梁的计算简图如图 6-12b 所示,梁的自重为均布载荷;电葫芦的轮压为一集中力 F,当其行至梁的中点时,所产生的挠度最大。

(1)计算变形　由型钢表查得,梁的自重及横截面的惯性矩分别为:

$$q = 874\ \text{N/m}$$

$$I = 33\ 760 \times 10^{-8}\ \text{m}^4$$

因 F 和 q 而引起的最大挠度均位于梁的中点 C,由表 6-3 查得:

$$|w_{CF}| = \frac{Fl^3}{48EI} = \frac{(50\times10^3\ \text{N})\times(10\ \text{m})^3}{48\times(210\times10^9\ \text{Pa})\times(33\ 760\times10^{-8}\ \text{m}^4)}$$

$$= 0.014\ 69\ \text{m} = 14.69\ \text{mm}$$

$$|w_{Cq}| = \frac{5ql^4}{384EI} = \frac{5\times(874\ \text{N/m})\times(10\ \text{m})^4}{384\times(210\times10^9\ \text{Pa})\times(33\ 760\times10^{-8}\ \text{m}^4)}$$

$$= 0.001\ 605\ \text{m} = 1.605\ \text{mm}$$

由叠加法,得梁的最大挠度为

$$|w|_{\max} = |w_{CF}| + |w_{Cq}| = 14.69\ \text{mm} + 1.605\ \text{mm} = 16.3\ \text{mm}$$

(2)校核刚度　吊车梁的许用挠度为

$$[\delta] = \frac{l}{500} = \frac{10\ \text{m}}{500} = 0.02\ \text{m} = 20\ \text{mm}$$

因

$$|w|_{\max} = 16.3\ \text{mm} < [\delta] = 20\ \text{mm}$$

故刚度符合要求。

例 6-6　车床主轴如图 6-13a 所示。在图示平面内,已知切削力 $F_1 = 2$ kN,啮合力 $F_2 = 1$ kN;主轴的外径 $D = 80$ mm,内径 $d = 40$ mm,$l = 400$ mm,$a = 200$ mm;C 处的许用挠度 $[\delta] = 0.000\ 1l$,轴承 B 处的许用转角 $[\theta] = 0.001$ rad;材料的弹性模量 $E = 210$ GPa。试校核其刚度。

解:将主轴简化为如图 6-13b 所示的外伸梁,外伸部分的抗弯刚度 EI 近似地视为与主轴相同。

(1)计算变形　主轴横截面的惯性矩为

$$I = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$$

$$= \frac{\pi}{64}[(80\times10^{-3}\ \text{m})^4 - (40\times10^{-3}\ \text{m})^4]$$

$$= 1\ 885\times10^{-9}\ \text{m}^4$$

由表 6-3 查得,因 F_1 而引起的 C 端的挠度和截面 B 的转角(图 6-13c)分别为:

$$w_{CF_1} = \frac{F_1 a^2}{3EI}(l + a)$$

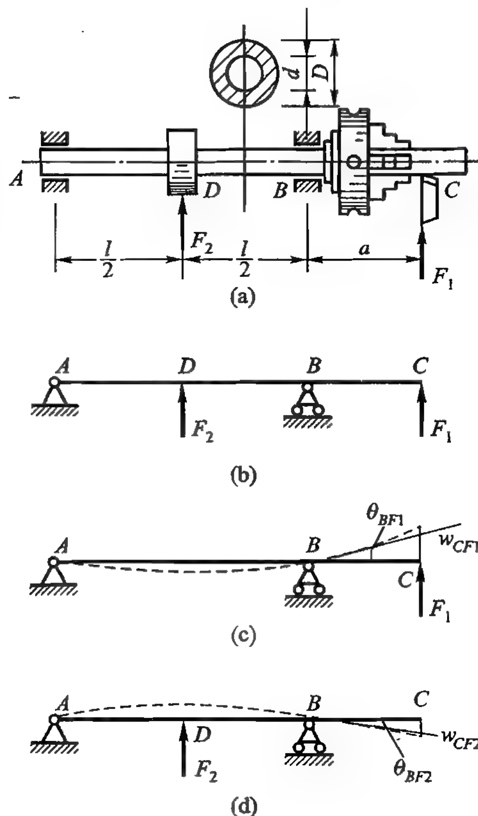


图 6-13

$$=\frac{(2\times10^{3}\ \mathrm{N})\times(200\times10^{-3}\ \mathrm{m})^{2}}{3\times(210\times10^{-9}\ \mathrm{Pa})\times(1\ 885\times10^{-9}\ \mathrm{m}^{4})}\times(400\times10^{-3}\ \mathrm{m}+200\times10^{-3}\ \mathrm{m})$$

$$=0.040\ 4\times10^{-3}\ \mathrm{m}=0.040\ 4\ \mathrm{mm}$$

$$\theta_{BF_1}=\frac{F_1al}{3EI}=\frac{(2\times10^{3}\ \mathrm{N})\times(200\times10^{-3}\ \mathrm{m})\times(400\times10^{-3}\ \mathrm{m})}{3\times(210\times10^{9}\ \mathrm{Pa})\times(1\ 885\times10^{-9}\ \mathrm{m}^{4})}=0.134\ 7\times10^{-3}\ \mathrm{rad}$$

因 F_2 而引起的截面 B 的转角(图 6－13 d)为

$$\theta_{BF_2}=-\frac{F_2l^2}{16EI}=\frac{(1\times10^{3}\ \mathrm{N})\times(400\times10^{-3}\ \mathrm{m})^{2}}{16\times(210\times10^{9}\ \mathrm{Pa})\times(1\ 885\times10^{-9}\ \mathrm{m}^{4})}=-0.025\ 3\times10^{-3}\ \mathrm{rad}$$

因 F_2 而引起的 C 端的挠度为

$$w_{CF_2}=\theta_{BF_2}\cdot a=(-0.025\ 3\times10^{-3}\ \mathrm{rad})\times(200\ \mathrm{mm})=-0.005\ 06\ \mathrm{mm}$$

最后由叠加法可得,C 端的总挠度为

$$w_C=w_{CF_1}+w_{CF_2}=0.040\ 4\ \mathrm{mm}-0.005\ 06\ \mathrm{mm}=0.035\ 3\ \mathrm{mm}$$

B 处截面的总转角为

$$\theta_B=\theta_{BF_1}+\theta_{BF_2}=0.134\ 7\times10^{-3}\ \mathrm{rad}-0.025\ 3\times10^{-3}\ \mathrm{rad}=0.109\ 4\times10^{-3}\ \mathrm{rad}$$

(2) 校核刚度　主轴的许用挠度和许用转角为:

$$[\delta]=0.000\ 1l=0.000\ 1\times400\ \mathrm{mm}=0.04\ \mathrm{mm}$$

$$[\theta]=0.001=1\times10^{-3}\ \mathrm{rad}$$

而

$$w_C=0.035\ 3\ \mathrm{mm}<[\delta]=0.04\ \mathrm{mm}$$

$$\theta_B=0.109\ 4\times10^{-3}\ \mathrm{rad}<[\theta]=1\times10^{-3}\ \mathrm{rad}$$

故主轴满足刚度条件。

以上讨论了梁的刚度计算,工程中可以采取一些措施,以提高梁的刚度。

由梁的挠曲线近似微分方程可见,梁的弯曲变形与弯矩$M(x)$及抗弯刚度有关,而影响梁弯矩的因素又包括载荷、支承情况及梁的有关长度。因此,为提高梁的刚度,可采取类似 §5－4 所述的一些措施:一是选用合理的截面形状或尺寸,从而增大截面的惯性矩 I;二是调整加载方式,例如合理地安排载荷的作用位置,在可能情况下将一个集中力分散为多点加载等,这都可起到降低弯矩的作用;三是在条件允许的情况下减小构件的跨度或有关长度,如缩小支座距离、增加支座等。其中第三种措施的效果最为显著,因为由表 6－3 可见,梁的跨长或有关长度是以其乘方影响梁的挠度和转角的。必须指出,梁的变形虽然与材料的弹性模量 E 有关,但就钢材而言,如采用高强度钢来代替强度较低的钢材,并不能起到提高构件刚度的作用,因为各种钢材的弹性模量 E 是非常接近的。

§6－6 静不定梁

1. 静不定梁的概念

前面所讨论的梁,其约束反力都可通过静力平衡方程求得,皆为静定梁。在

工程实际中，为提高梁的强度和刚度，或因构造上的需要，往往在静定梁上增加一个或几个约束。这时，未知反力的数目将多于平衡方程的数目，仅由静力平衡方程不能求解。这种梁称为**静不定梁**或**超静定梁**。

例如安装在车床卡盘上的工件（图 6－14a）如果比较细长，切削时会产生过大的挠度（图 6－14b），影响加工精度。为减小工件的挠度，常在工件的自由端用尾架上的顶尖顶紧。在不考虑水平方向的支座反力时，这相当于增加了一个可动铰支座（图 6－15）。这时工件的约束反力有四个：F_{Ax}、F_{Ay}、M_A 和 F_B，而有效的平衡方程只有三个。未知反力数目比平衡方程数目多出一个，这是一次静不定梁。

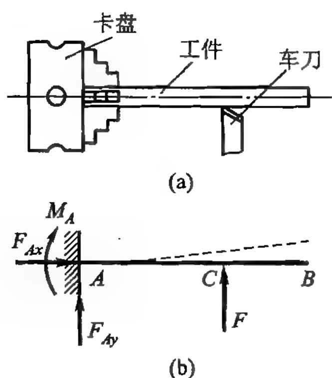


图 6－14

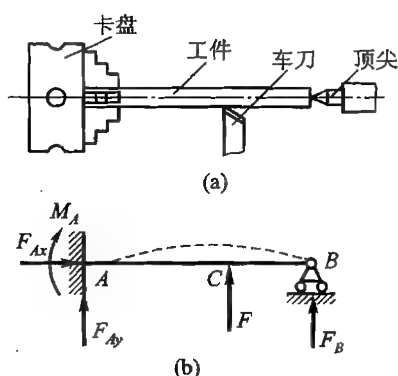


图 6－15

又如一些机器中的齿轮轴，采用三个轴承支承（图 6－16）；厂矿中铺设的管道一般则需用三个以上的支座支承（图 6－17），这些都属于静不定梁。

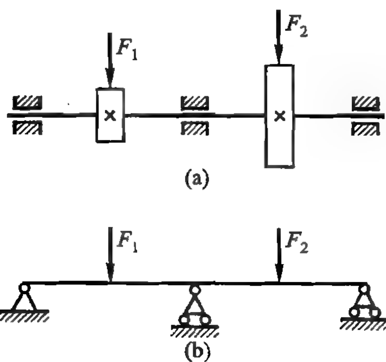


图 6－16

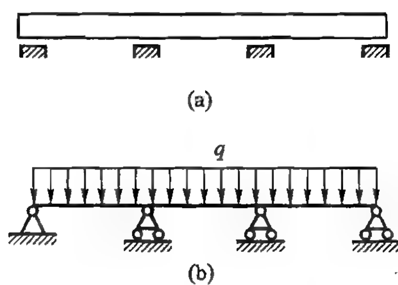


图 6－17

2. **用变形比较法**求解静不定梁

解静不定梁的方法与解拉压静不定问题类似，也需根据梁的变形协调条件和力与变形间的物理关系，建立补充方程，然后与静力平衡方程联立求解。如何建立补充方程，是解静不定梁的关键。

在静不定梁中，那些超过维持梁平衡所必需的约束，习惯上称为多余约束；与其相应的支座反力称为多余约束反力或多余支座反力。可以设想，如果撤除静不定梁上的多余约束，则此静不定梁又将变为一个静定梁，这个静定梁称为原静不定梁的基本静定梁。例如图 6－18a 所示的静不定梁，如果以 B 端的可动铰支座为多余约束，将其撤除后而形成的悬臂梁（图 6－18b）即为原静不定梁的基本静定梁。

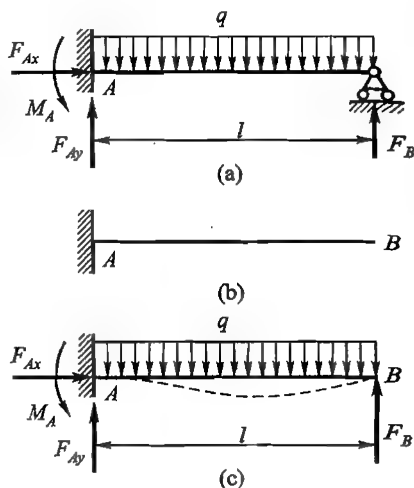


图 6－18

为使基本静定梁的受力及变形情况与原静不定梁完全一致，作用于基本静定梁上的外力除原来的载荷外，还应加上多余支座反力，同时，还要求基本静定梁满足一定的变形协调条件。例如，上述的基本静定梁的受力情况如图 6－18c 所示，由于原静不定梁在 B 端有可动铰支座的约束，因此，还要求基本静定梁在 B 端的挠度为零，即

$$w_B = 0 \tag{a}$$

此即应满足的变形协调条件（简称变形条件）。这样，就将一个承受均布载荷的静不定梁变换为一个静定梁来处理，这个静定梁在原载荷和未知的多余支座反力作用下，B 端的挠度为零。

根据变形协调条件及力与变形间的物理关系，即可建立补充方程。由图 6－18c可见，B 端的挠度为零，可将其视为均布载荷引起的挠度 w_{Bq} 与未知支座反力 F_B 引起的挠度 w_{BF_B} 的叠加结果，即

$$w_B = w_{Bq} + w_{BF_B} = 0 \tag{b}$$

由表 6－3 查得：

$$w_{Bq} = -\frac{ql^4}{8EI} \tag{c}$$

$$w_{BF_B} = \frac{F_B l^3}{3EI} \tag{d}$$

（c）、（d）二式即为力与变形间的物理关系，将其代入式（b），得

$$-\frac{ql^4}{8EI} + \frac{F_B l^3}{3EI} = 0 \tag{e}$$

这就是所需的补充方程。由此可解出多余支座反力为

$$F_B=\frac{3}{8}ql$$

多余支座反力求得后，再利用平衡方程，其他支座反力即可迎刃而解。由图 6－18c，梁的平衡方程为：

$$\sum F_x=0,\qquad F_{Ax}=0$$

$$\sum F_y=0,\qquad F_{Ay}-ql+F_B=0$$

$$\sum M_A=0,\qquad M_A+F_Bl-\frac{ql^2}{2}=0$$

以 F_B 之值代入上列各式，解得：

$$F_{Ax}=0,\quad F_{Ay}=\frac{5}{8}ql,\quad M_A=\frac{1}{8}ql^2$$

这样，就解出了静不定梁的全部支座反力。所得结果均为正值，说明各支座反力的方向和反力偶的转向与所设的一致。支座反力求得后，即可进行强度和刚度计算。

由以上的分析可见，解静不定梁的方法是：选取适当的基本静定梁；利用相应的变形协调条件和物理关系建立补充方程；然后与平衡方程联立解出所有的支座反力。这种解静不定梁的方法，称为变形比较法。求解静不定问题的方法还有多种，以力为未知量的方法称为力法，变形比较法属于力法中的一种。

解静不定梁时，选择哪个约束为多余约束并不是固定的，可根据解题时的方便而定。选取的多余约束不同，相应的基本静定梁的形式和变形条件也随之而异。例如上述的静不定梁（图 6－19a）也可选择阻止 A 端转动的约束为多余约束，相应的多余支座反力则为力偶矩 M_A。解除这一多余约束后，固定端 A 将变为固定铰支座；相应的基本静定梁则为一简支梁，其上的载荷如图 6－19b 所示。这时要求此梁满足的变形条件则是 A 端的转角为零，即

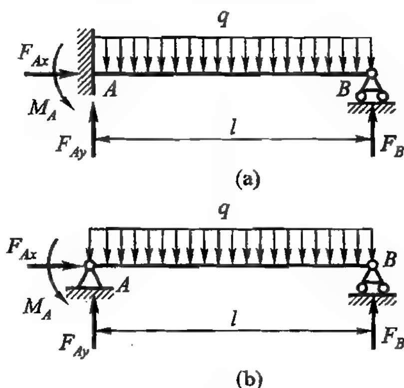


图 6－19

$$\theta_A=\theta_{Aq}+\theta_{AM}=0$$

由表 6－3 查得，因 q 和 M_A 而引起的截面 A 的转角分别为

$$\theta_{Aq}=-\frac{ql^3}{24EI}$$

$$\theta_{AM}=\frac{M_Al}{3EI}$$

将其代入变形条件后，所得的补充方程为

$$-\frac{ql^3}{24EI}+\frac{M_A l}{3EI}=0$$

由此解得

$$M_A=\frac{ql^2}{8}$$

最后利用平衡方程解出其他支座反力，结果同前。

例 6－7　图 6－20a 所示为三支点单梁吊车。梁长 $l=8$ m，由 40 a 工字钢制成，许用应力为 $[\sigma]=140$ MPa，吊车起重量为 $F=100$ kN，梁的自重不计。试按电葫芦行至 CB 段中点时的情况，校核梁的强度。

解：吊车梁的计算简图如图 6－20b 所示，其上有四个支座反力，但只能列出三个平衡方程，故该梁为一次静不定，需要一个补充方程。

(1) 取基本静定梁，列变形条件　选取 C 点的支座为多余约束，F_C 为多余支座反力，则相应的基本静定梁为一简支梁。其上受载荷 F 和多余支座反力 F_C 的作用（图 6－20c）。相应的变形条件为

$$w_C=w_{CF}+w_{CF_C}=0$$

式中 w_{CF} 和 w_{CF_C} 分别为 F 和 F_C 在 C 点引起的挠度。

(2) 建立补充方程　自表 6－3 查得

$$w_{CF}=-\frac{F\cdot\frac{l}{4}}{48EI}\left[3l^2-4\left(\frac{l}{4}\right)^2\right]=-\frac{11Fl^3}{768EI}$$

$$w_{CF_C}=\frac{F_C l^3}{48EI}$$

将 w_{CF} 和 w_{CF_C} 代入变形条件，得补充方程

$$-\frac{11Fl^3}{768EI}+\frac{F_C l^3}{48EI}=0$$

(3) 解出支座反力　由补充方程解得

$$F_C=\frac{11}{16}F$$

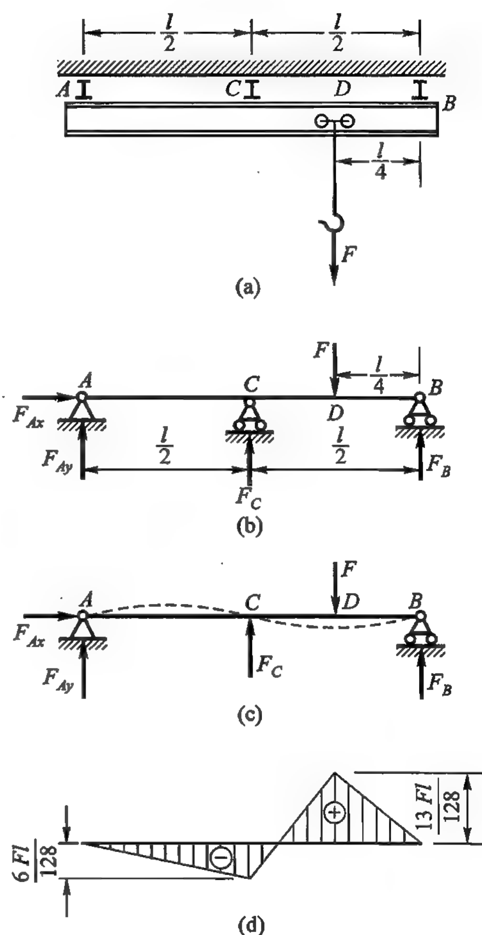


图 6－20

再列出平衡方程：

$$\sum F_x=0,\qquad F_{Ax}=0$$

$\sum M_A = 0$, $\qquad F_B l - F \cdot \frac{3l}{4} + F_C \cdot \frac{l}{2} = 0$

$\sum F_y = 0$, $\qquad F_{Ay} + F_C - F + F_B = 0$

以 F_C 之值代入解得：

$$F_B = \frac{13}{32}F, \quad F_{Ay} = -\frac{3}{32}F$$

其中 F_{Ay} 为负值，与原设方向相反。

（4）校核强度　作梁的弯矩图如图 6－20 d 所示，最大弯矩在 D 处，其值为

$$M_{max} = \frac{13}{128}Fl = \frac{13}{128}(100 \times 10^3 \text{ N}) \times (8 \text{ m}) = \frac{13}{16} \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

由型钢表查得 40a 工字钢的抗弯截面系数为

$$W_z = 1\ 090 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

则梁的最大弯曲正应力为

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} = \frac{1}{(1\ 090 \times 10^{-6} \text{ m}^3)}\left(\frac{13}{16} \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}\right) = 74.5 \times 10^6 \text{ Pa}$$

$$= 74.5 \text{ MPa} < [\sigma] = 140 \text{ MPa}$$

故知梁满足强度条件。

若吊车梁在 C 处没有中间支座，为一简支梁，当电葫芦行至梁中点 C 时，梁在 C 处横截面上的弯矩最大，其值为

$$M_{max} = \frac{Fl}{4} = \frac{(100 \times 10^3 \text{ N}) \times (8 \text{ m})}{4} = 200 \times 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}$$

则梁的最大应力

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} = \frac{200 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}}{1\ 090 \times 10^{-6} \text{ m}^3} = 183.5 \times 10^6 \text{ Pa}$$

$$= 183.5 \text{ MPa} > [\sigma] = 140 \text{ MPa}$$

这就不能满足强度条件了。

由此例可见，增加梁的支座能减小梁内应力，起到提高梁强度的作用；同样，也能提高梁的刚度。但静不定梁对制造精度、装配技术等有较高的要求。例如三支点梁的各个支座就要求准确地在一条直线上，稍有误差，就会引起装配应力。由此例还可以看出，如果将静不定梁多余约束的作用取消，将原梁作为一个静定梁来进行设计计算，其结果是偏于安全的。



小　结

本章介绍了求梁的变形的两种方法：积分法和叠加法。

1. 积分法求梁变形的方法和步骤：

（1）外力分析　列平衡方程，求支座反力，并校核计算结果。

（2）内力分析　列弯矩方程。

（3）列出梁的挠曲线近似微分方程，并对其逐次积分，在数学上是求不定积分。

式(6－3)是以教材所选坐标系和对弯矩 M、挠度 w 及转角 θ 等的正负号规定为前提的。在列挠曲线近似微分方程时，要对正负号予以充分注意。

列挠曲线近似微分方程时，常需要将梁分段。在列弯矩方程时，需按集中力、集中力偶作用截面及分布载荷的始终点截面分段。此外应在材料弹性模量 E 及横截面的惯性矩 I 突变处及中间铰处分段。上述分段原则十分重要。

(4) 利用边界条件及连续条件确定积分常数，它是积分法的关键。可由约束性质列出约束条件，铰支端处对应的挠度为零，固定端处对应的挠度及转角同时为零。可由梁变形的连续性列出连续条件，通常，同一截面两侧的挠度相等，转角也相等(参见例6－1及例6－3)。

(5) 将求得的积分常数代入，建立转角方程和挠度方程。在数学上是从不定积分中确定一个原函数。

(6) 求最大转角、最大挠度或指定截面的转角和挠度。

积分法适用于建立一般情况下的转角方程和挠度方程。

2. 叠加法：

(1) 叠加原理　梁在多种载荷作用下任一截面的转角或挠度，等于该梁在每一种载荷单独作用下，同一截面转角或挠度的总和。

(2) 叠加原理的适用条件是：梁的变形很小，材料服从胡克定律。

(3) 可从表6－3中，查找到基本形式梁在单一种载荷作用下的挠曲线方程、端截面转角及绝对值最大的挠度。但要注意对比题中与表中物理量(载荷及长度等)的符号、方向和大小，若有差异，应作代换，切忌生搬硬套。

叠加法利用已有公式以简捷地求出梁的变形。叠加法在材料力学中有广泛的应用。

3. 梁的刚度分析：

(1) 梁的刚度条件是

$$|w|_{max} \leqslant [\delta]$$
$$|\theta|_{max} \leqslant [\theta]$$

可从有关设计规范或手册中查得 $[\delta]$ 及 $[\theta]$ 的值。

(2) 梁的刚度分析内容包括刚度校核、截面设计及确定许用载荷三方面。

(3) 提高梁的刚度的措施　选择合理的截面形状和尺寸、增大惯性矩、提高材料的弹性模量、合理安排梁的支座与加载方式、减少梁的跨度或有关长度等，以提高刚度。尤其是减少梁的跨度，能显著降低挠度。

4. 静不定梁。未知支座反力数目多于独立平衡方程数目的梁称为静不定梁。用变形比较法解静不定梁的方法是如下。

(1) 确定静不定次数　约束反力数目多于独立的平衡方程的数目即为静不定次数。

(2) 选取基本静定梁　解除多余约束,并在该处施加相应的多余约束反力,形成一个作用有载荷和多余约束反力的静定梁,称它为基本静定梁。选择合适的基本静定梁,便于解题。

(3) 建立补充方程　基本静定梁在载荷及多余未知约束反力作用下仍应满足原有约束条件及连续性,据此列出变形协调条件。同时列出力与变形的物理关系,从而构成补充方程。

由于所解除的多余约束的不同,所得基本静定梁形式不是唯一的,相应的补充方程也不相同。

(4) 补充方程的数目与独立平衡方程数目之和等于未知力的数目,从而求得全部未知力(参见例 6-7)。

(5) 进行强度分析及刚度分析。

5. 本章计算题的主要类型:

(1) 用积分法求梁的变形(参见例 6-1 至 6-3)。

(2) 用叠加法求梁的变形(参见例 6-4)。

(3) 梁的刚度校核(参见例 6-5 及例 6-6)。

(4) 解静不定梁(参见例 6-7)。

6. 至本章为止,已经讨论了轴向拉压、剪切、扭转和弯曲等四种基本变形杆件的问题。这些杆件的外力、内力、变形、应力、强度及刚度条件等各有其特点,但又有其相似之处。现将它们作一归纳,列于表 6-4 中。

 思考题

6-1　用什么量度量梁的变形?这些量具有什么几何意义?

6-2　在图 6-21 中画出三根梁的弯矩图。试按挠曲线近似微分方程分析挠曲线的大致形状,并分析其原因。

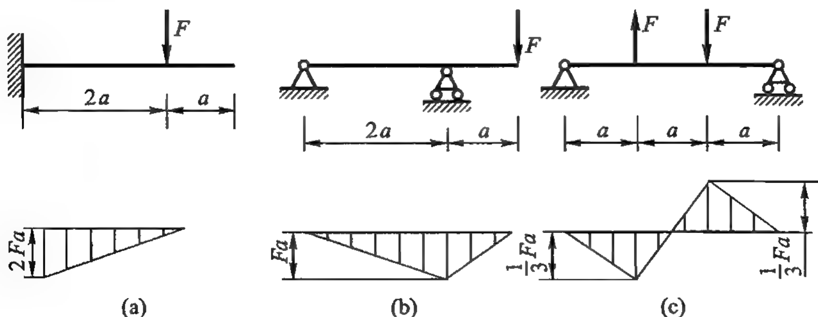


图 6-21

表 6-4

变形形式	轴向拉压	剪切	扭转	对称弯曲
简图				
外力特点	外力合力的作用线与杆件的轴线重合	杆件两侧受相距很近的横向力作用	外力偶作用面垂直于杆件的轴线	外力垂直于杆件的轴线并作用在纵向对称面内
变形特点	杆件沿轴线方向伸长或缩短	两力间的截面沿外力方向发生相对错动	任意两横截面绕轴线产生相对转动	轴线弯曲成位于纵向对称面内的一条平面曲线
内力	轴力 $F_N=F$	剪力 $F_S=F$	扭矩 $T=M_e$	弯矩 M = 截面一侧所有外力对截面形心之矩的代数和；剪力 F_S = 截面一侧所有横向外力的代数和

续表

变形形式		轴向拉压	剪切	扭转	对称弯曲
应力	分布规律	σ	τ　σ_{bs}	τ	$\sigma(-)$　$\sigma(+)$　τ
	计算公式	$\sigma=\frac{F_N}{A}$	$\tau=\frac{F_S}{A}$　$\sigma_{bs}=\frac{F}{A_{bs}}$	$\tau_\rho=\frac{T}{I_p}\rho$	$\sigma=\frac{M}{I_z}y$　$\tau=\frac{F_S S_z^*}{I_z b}$
强度条件		$\sigma=\frac{F_N}{A}\leqslant[\sigma]$	$\tau=\frac{F_S}{A}\leqslant[\tau]$ $\sigma_{bs}=\frac{F}{A_{bs}}\leqslant[\sigma_{bs}]$	$\tau_{max}=\frac{T}{W_p}\leqslant[\tau]$	$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{W_z}\leqslant[\sigma]$ $\tau_{max}=\frac{F_{Smax}S_{z\,max}^*}{I_z b}\leqslant[\tau]$
变形		$\Delta l=\frac{F_N l}{EA}$		$\phi=\frac{Tl}{GI_p}$	$\frac{1}{\rho}=\frac{M(x)}{EI}\rightarrow$ θ（转角）w（挠度）
刚度条件				$\varphi=\frac{T}{GI_p}\cdot\frac{180}{\pi}\leqslant[\varphi]$	$\lvert w\rvert_{max}\leqslant[\delta]$ $\lvert\theta\rvert_{max}\leqslant[\theta]$

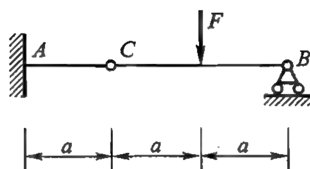


图 6－22

6－3 如图 6－22 所示梁 ABC,试说明中间铰 C 所在截面处挠曲线是否有拐折?

6－4 对于图 6－23 所示的简支梁,在弹性梁的小挠度弯曲中,对挠曲线近似微分方程式 $EIw''(x)=\pm M(x)$ 的正负号应该按什么原则选定?在图示各坐标系中应该如何决定正负号?

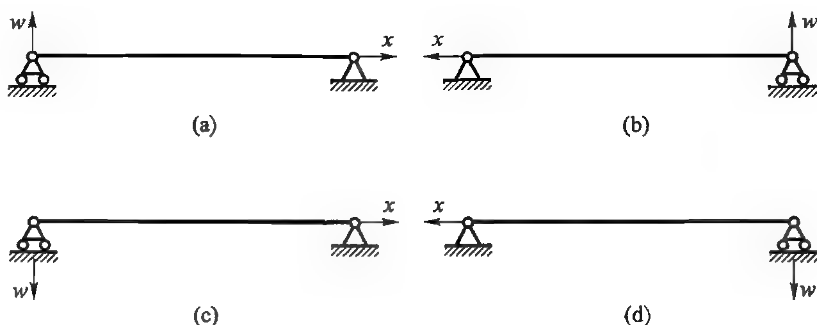


图 6－23

6－5 对于图 6－24 所示的梁,用积分法求变形时,试列出确定积分常数时的边界条件及连续条件。

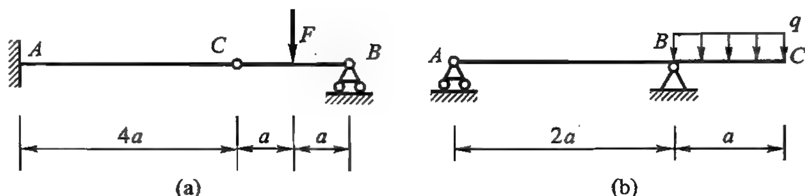


图 6－24

6－6 图 6－25 所示变截面梁,用积分法求自由端的挠度时,微分方程应分________段,边界条件为:________________,连续条件为:________________。

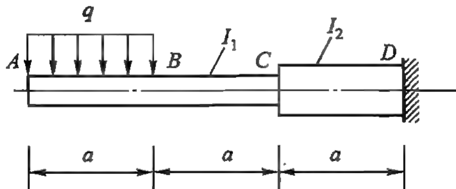


图 6－25

6－7 图 6－26 所示悬臂梁 AB 的抗弯刚度为 EI,截面 C 处的挠度 $w_C=-\dfrac{2M_e a^2}{EI}-\dfrac{9Fa^3}{EI}$,是否正确?

6－8 图 6－27a 所示悬臂梁在 CB 段受均布载荷 q 的作用,它相当于图 6－27b 及图 6－27c 叠加的结果。下列结论中哪些是正确的?

A. 梁 B 端的挠度 w_B 等于梁 A_1B_1 与梁 A_2B_2 自由端挠度的代数和，即 $w_B = w_{B1} + w_{B2}$

B. $w_{B1} = -\dfrac{2qa^4}{EI}$

C. $w_{B2} = \dfrac{qa^4}{8EI}$

D. $w_B = -\dfrac{55qa^4}{24EI}$

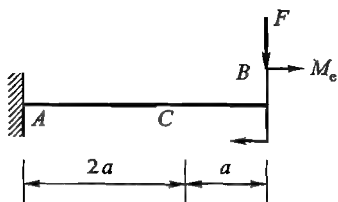
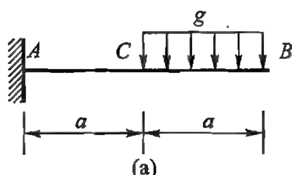
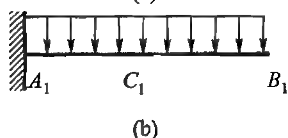


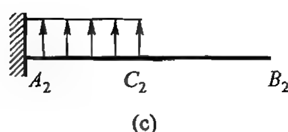
图 6－26



(a)



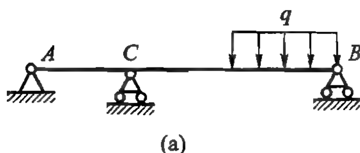
(b)



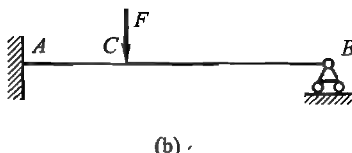
(c)

图 6－27

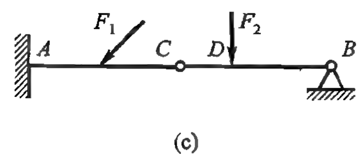
6－9 试判断图 6－28 所示各梁的静不定的次数。



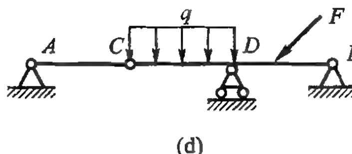
(a)



(b)



(c)



(d)

图 6－28

6－10 试从图 6－28a、b 所示的静不定梁中选择几种常见的基本静定梁，分别列出它们的变形条件。就计算工作量而言，哪种基本静定梁较为简便？

6－11 在设计中，一受弯的碳素钢轴刚度不够，为了提高刚度而改用优质合金钢是否合理？为什么？

6－12 图 6－29 所示简支梁跨度为 l，均布载荷集度为 q，减少梁的挠度的最有效措施是下列中的哪一个？

A. 加大截面，以增加其惯性矩 I 的值

B. 不改变截面面积，而采用惯性矩 I 值较大的工字形截面

C. 用弹性模量 E 较大的材料

D. 在梁的跨度中点增加支座

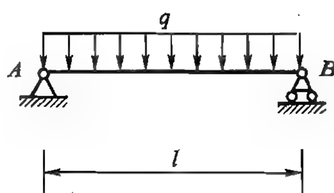
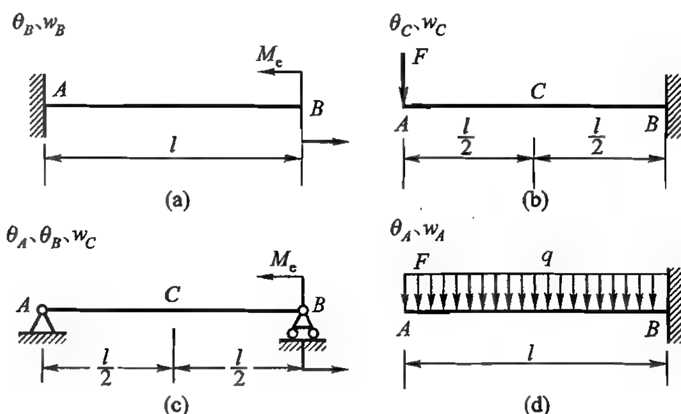


图 6－29

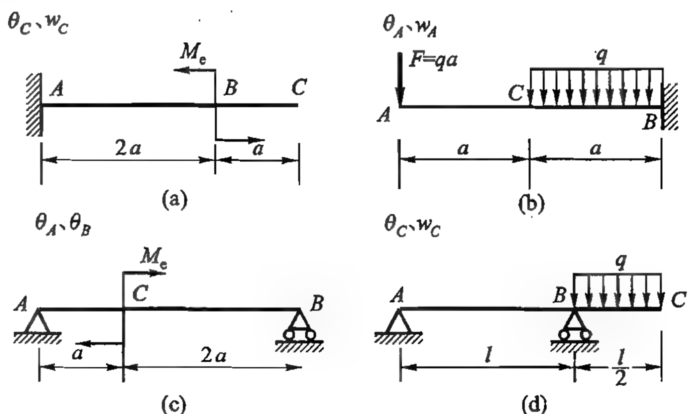
习 题

6－1 用积分法求以下各梁的转角方程、挠曲线方程以及指定的转角和挠度。已知抗弯刚度 EI 为常数。



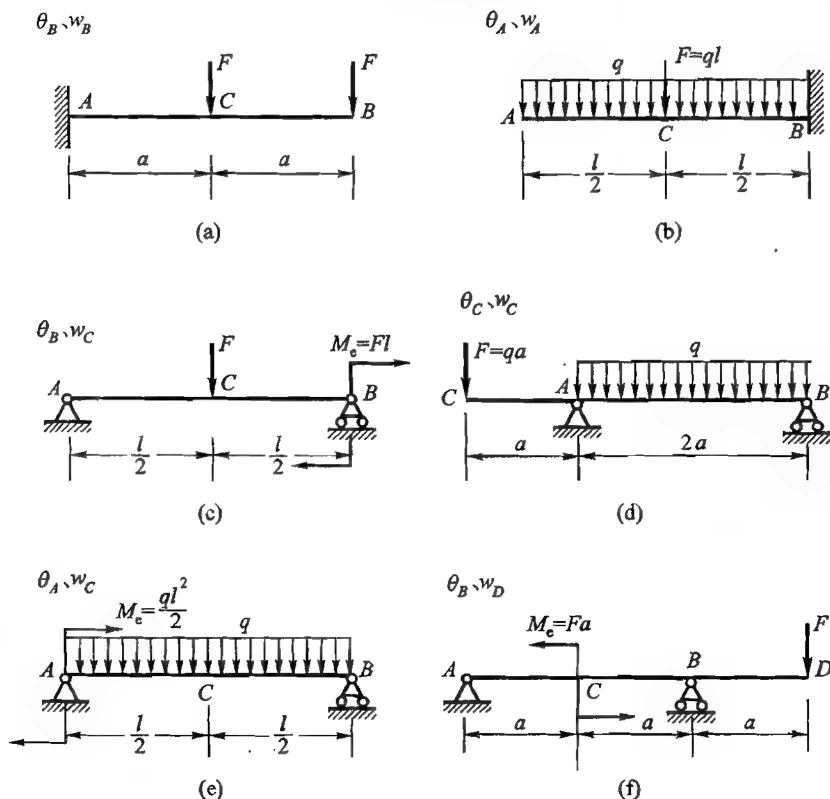
题 6－1 图

6－2 用积分法求以下各梁的转角方程、挠曲线方程以及指定的转角和挠度。已知抗弯刚度 EI 为常数。



题 6－2 图

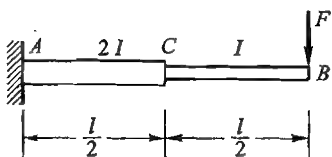
6-3 用叠加法求图示各梁中指定截面的挠度和转角。已知梁的抗弯刚度 EI 为常数。



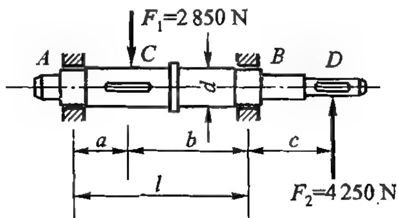
题 6-3 图

6-4 阶梯形悬臂梁如图所示，AC 段的惯性矩为 CB 段的 2 倍。用积分法求 B 端的转角及挠度。

6-5 一齿轮轴受力如图所示，已知 $a=100$ mm，$b=200$ mm，$c=150$ mm，$l=300$ mm；材料的弹性模量 $E=210$ GPa；轴在轴承处的许用转角 $[\theta]=0.005$ rad。近似地设全轴的直径均为 $d=60$ mm，试校核轴的刚度。



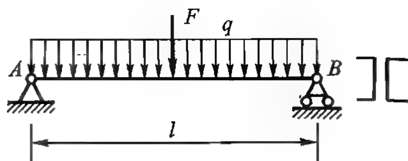
题 6-4 图



题 6-5 图

6-6 一跨度 $l=4$ m 的简支梁如图所示，受集度 $q=10$ kN/m 的均布载荷和 $F=20$ kN

的集中载荷作用。梁由两槽钢组成。设材料的许用应力$[\sigma]=160$ MPa,梁的许用挠度$[\delta]=\frac{l}{400}$。试选定槽钢的型号,并校核其刚度。梁的自重忽略不计。



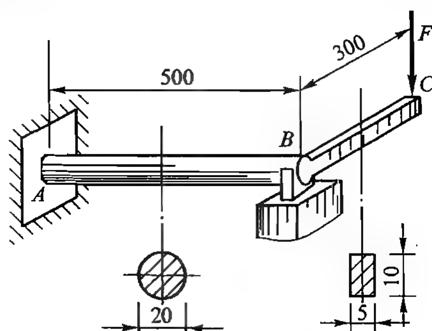
题 6－6 图

6－7 一输气管道简化为一简支梁,已知管道外径 $D=114$ mm,壁厚 $\delta=4$ mm,单位长度重量为 $q=106$ N/m;材料的弹性模量 $E=210$ GPa。设管道的许用挠度$[\delta]=\frac{l}{500}$,试确定此管道的最大跨度。

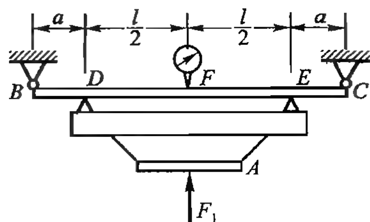
6－8 一 45a 工字钢的简支梁,长 $l=10$ m,受布满全梁的均布载荷作用;已知材料的弹性模量 $E=210$ GPa。若梁的最大挠度不得超过$\frac{l}{600}$,求最大的均布载荷集度 q。

6－9 一直角拐如图所示。AB 段横截面为圆形,BC 段为矩形;A 端固定,B 端为一滑动轴承,C 端作用一集中力 $F=60$ N;有关尺寸如图所示。已知材料的弹性模量 $E=210$ GPa,剪切弹性模量 $G=0.4E$。试求 C 端的挠度。

6－10 以弹性元件作为测力装置的试验如图所示,通过测量 BC 梁中点的挠度来确定卡头 A 处作用的力 F_1。已知 $l=1$ m,$a=0.1$ m,梁截面宽 $b=60$ mm,高 $h=40$ mm,材料的弹性模量 $E=220$ GPa。试问当百分表 F 指针转动一小格(1/100 mm)时,载荷 F_1 增加多少?

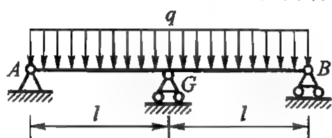


题 6－9 图

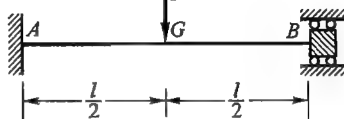


题 6－10 图

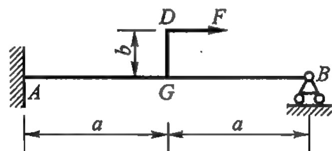
6－11 试求以下各梁的支座反力,并作弯矩图。各梁的 EI 均为常数。



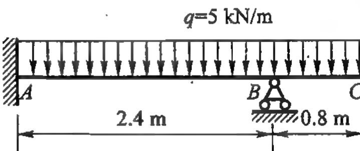
(a)



*(b)



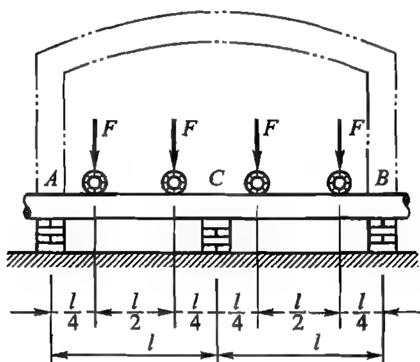
(c)



(d)

题 6－11 图

6-12 加热炉内的水管横梁支持在三个支点上，承受着纵管传来的钢锭载荷，如图所示。求 A、B、C 处的支座反力，并作横管的弯矩图。



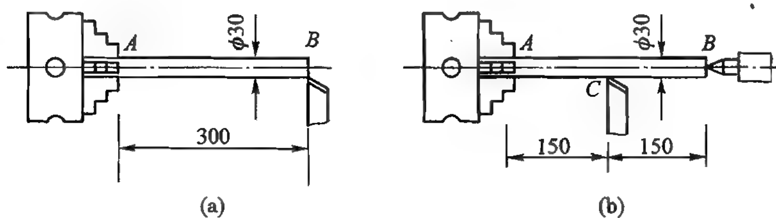
题 6-12 图

6-13 在车床上加工工件，已知工件的弹性模量 $E=200$ GPa，车刀作用于工件上的径向力 $F=360$ N；工件的尺寸如图所示。问：

(1) 按图(a)方式加工时，因工件变形而引起的直径误差为多少？

(2) 如在工件自由端加上顶尖后，按车刀行至工件中点时考虑(图 b)，这时因工件变形而引起的直径误差又为多少？

(3) 两者误差的百分比为多少？



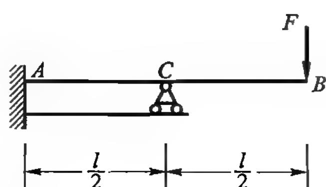
题 6-13 图

6-14 悬臂梁 AB 因强度和刚度不足，用同材料同截面的一根短梁 AC 加固，如图所示。问：

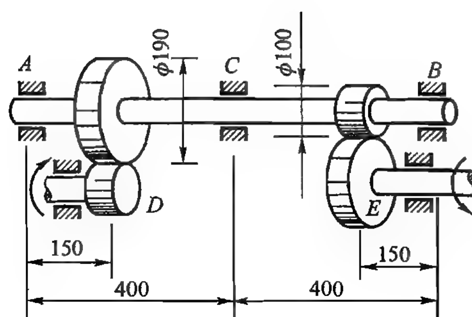
(1) 支座 C 处的反力 F_C 为多少？

(2) 梁 AB 的最大弯矩和 B 点的挠度比没有梁 AC 支承时减少多少？

6-15 图示一铣床齿轮轴 AB，已知其传动的功率 $P=7.5$ kW，转速 $n=230$ r/min，D 为主动轮，现仅考虑齿轮切向力的影响，试作此轴的弯矩图。



题 6－14 图



题 6－15 图

第七章　应力状态和强度理论

§7-1 应力状态的概念

1. 为什么要研究应力状态

前面，在研究轴向拉伸（或压缩）、扭转、弯曲等基本变形构件的强度问题时已经知道，这些构件横截面上的危险点处只有正应力或切应力，并建立了相应的强度条件：

$$\sigma_{max} \leqslant [\sigma], \quad \tau_{max} \leqslant [\tau]$$

然而在某些情况下，材料的破坏并不沿横截面。例如，在拉伸试验中，低碳钢屈服时在与轴线成45°方向出现滑移线；铸铁圆杆扭转时，沿45°螺旋面断裂。上述现象表明，杆件的破坏还与斜截面上的应力有关。通过受力构件内某一点的各个截面上的应力情况，就称为该点的应力状态。

在基本变形情况下，杆件的横截面的危险点处只有一种应力（正应力或切应力），它与斜截面上的应力具有唯一的定量关系。因此，即使破坏不沿横截面，按横截面计算的工作应力及测得的破坏极限应力（σ_b、σ_s 或 τ_b、τ_s），从而所建立的上述强度条件仍然成立。但是在工程实际中，还常遇到一些组合变形问题，例如矿山牙轮钻的钻杆就同时存在扭转和压缩变形，这时杆横截面上危险点处不仅有正应力 σ，还有切应力 τ。它们对斜截面上的应力和杆件的破坏具有综合的影响，如仍按正应力和切应力分别进行强度计算，显然是错误的。

总之，无论是基本变形还是组合变形的构件，都必须分析点的应力状态，才能寻求破坏的形式和原因，为建立适于各种变形下构件的强度条件，提供理论依据。应力状态的理论，不仅是为各种变形情况下构件的强度计算建立理论基础，在研究金属材料的强度问题时，在采用试验方法来测定构件应力的试验应力分析中，以及在断裂力学、岩石力学和地质力学等学科的研究中，都要广泛地应用到应力状态的理论，和由它得出的一些结论。

2. 应力状态的研究方法

由于构件内的应力分布一般是不均匀的，所以在分析过一点各个不同方向

截面上的应力时，不宜截取构件的整个截面来研究，而是围绕该点截取一个微小的正六面体，即 §3－3 中所说的单元体来分析。因为我们研究的是一点的应力状态，单元体每对平行的两个平面间的距离趋于零，均是指该点同一截面，区别仅在于所取的外法线方向相反。所以其应力大小相等、方向相反，且可以认为沿截面是均布的，单元体三对平行平面上的应力即为该点三个正交截面上的应力。这种单元体称为点的单元体①。

当物体受静力作用时，如其整体是平衡的，从中截取的单元体一定也是平衡的。从而可用任一假想截面截单元体为两部分，考虑其中任一部分的平衡，即可求得所截的截面上的应力，所以点的单元体上的应力完全确定了一点的应力状态。这就是用截面法研究应力状态的基本方法——点的单元体分析法。

必须注意，表示一点的应力状态可截取不同方位的单元体，但为确定各斜截面上的应力，所截取三对正交平行平面上的应力应为材料力学理论所能确定的单元体方位。为此，首要的是取一对平行平面为杆件的横截面，另两对平行平面应选与横截面垂直、且其应力可求的纵向截面。例如在图 7－1a 中所示的轴向拉伸杆件，为了分析 A 点处的应力状态，可以围绕 A 点以横向和纵向截面截取出一个单元体来考虑。由于拉伸杆件的横截面上有均匀分布的正应力，所以这个单元体只在垂直于杆轴的平面上有正应力 $\sigma_x=\dfrac{F}{A}$，而其他各平面上都没有应力。在图 7－1b 所示的梁上，在上、下边缘的 B 和 B' 点处，也可截取出类似的单元体，此单元体只在垂直于梁轴的平面上有正应力 σ_x。又如圆轴扭转时，若在轴表面 C 点处截取单元体，则在垂直于轴线的平面上有切应力 τ_x；再根据切应力互等定理，在通过直径的平面上也有大小相等正负号相反的切应力 τ_y，如图 7－1c所示。显然，对于同时产生弯曲和扭转变形的圆杆，如图 7－1d 所示，若在 D 点处截取单元体，则除有因弯曲而产生的正应力 σ_x 外，还存在因扭转而产生的切应力 τ_x、τ_y。

上面所截取的单元体，有一个共同的特点，就是单元体各平面上的应力，都平行于单元体的某一对平面，而在这一对平面上却没有应力，这样的应力状态称为平面应力状态。其中图 7－1a 和 b 所示的单元体只在一对平面上有正应力作用，而其他两对平面上都没有应力，这样的应力状态称为单向应力状态。但因单向应力状态问题的分析和计算与平面应力状态没有很大的差别，因而可以将其纳入平面应力状态的范围中讨论，作为平面应力状态的一种特殊情况。若围绕

---

① 在固体力学中，如分析体内各点应力连续分布所应满足的静力平衡条件，则所取单元体每对平行平面间的距离不能视为趋于零，而应相差一微量，因而两面上的应力也应差一微量，这样的单元体可称为微域单元体。

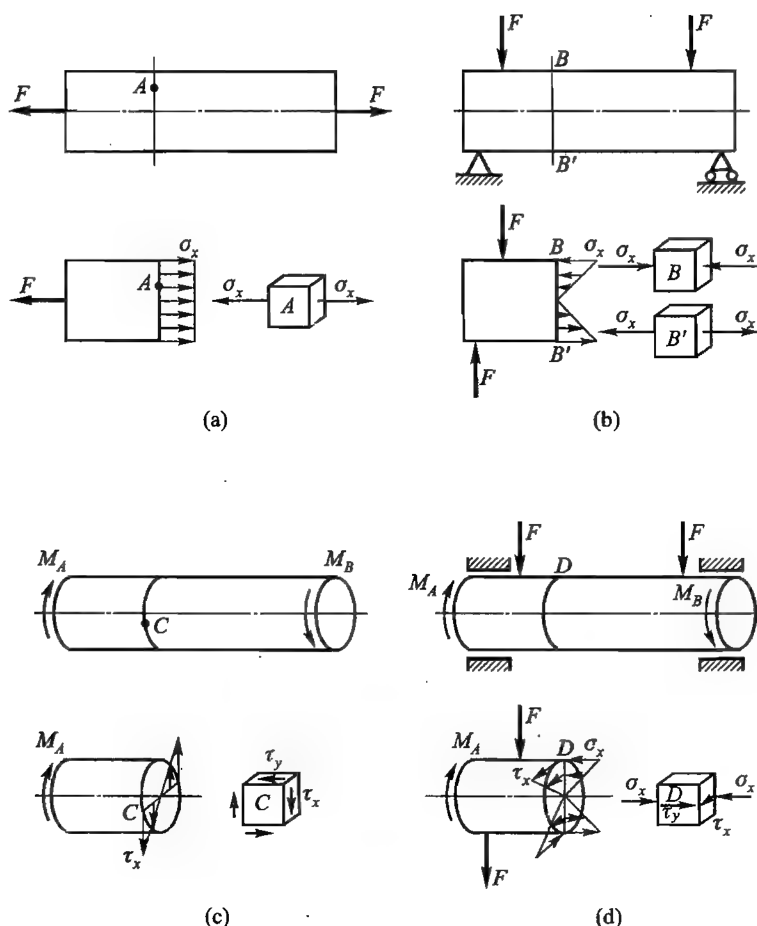


图 7-1

构件内一点所截取的单元体，不管取向如何，在其三对平面上都有应力作用，这种应力状态则称为**空间应力状态**。

平面应力状态和空间应力状态统称为**复杂应力状态**。本章着重讨论平面应力状态，对空间应力状态仅作一般介绍。最后再介绍几种常用的强度理论。

§7-2 平面应力状态

平面应力状态是经常遇到的一种应力状态。图 7-2 所示的单元体，为平面应力状态的最一般情况。在构件中截取单元体时，总是选取这样的截面位置，使单元体上所作用的应力均为已知。然后在此基础上，分析任意斜截面上的应力，确定最大正应力和最大切应力。

1. 斜截面上的应力

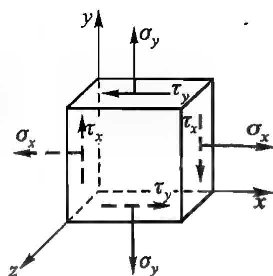


图 7－2

设一平面应力状态如图 7－3a 所示，已知与 x 轴垂直的两平面上的正应力为 σ_x，切应力为 τ_x；与 y 轴垂直的两平面上的正应力为 σ_y，切应力为 τ_y；与 z 轴垂直的两平面上无应力作用。现求此单元体任意平行于 z 轴的斜截面上的应力。

平面应力状态的单元体也可表示为如图 7－3b 所示，并以 α 表示任意斜截面的外法线与 x 轴的夹角。如将单元体沿斜截面 BC 假想地截开，一般说来在此斜截面上将作用有任意方向的应力，但可将其分解为垂直于该截面的正应力和作用线位于该截面的切应力，并分别以 σ_α 和 τ_α 表示（图 7－3c）。现取楔形体 ABC 为研究对象，通过平衡关系来求斜截面上的应力。

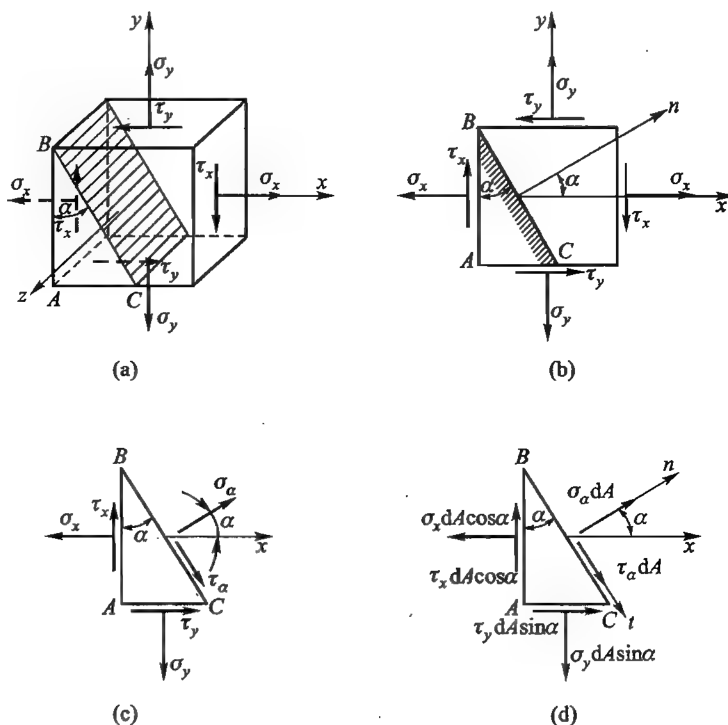


图 7－3

由于作用在单元体各平面上的应力是单位面积上的内力，所以不能直接用应力来列平衡方程。只有将应力乘以其作用面的面积以后，才能考虑各力之间的平衡关系。为此，设斜截面 BC 的面积为 dA，则侧面 AB 和底面 AC 的面积分别为 $dA\cos\alpha$ 和 $dA\sin\alpha$。将各平面上的应力乘以其作用面的面积后，可得作用

于楔形体 ABC 上的各力如图 7－3d 所示。选取垂直于斜截面的 n 轴和平行于斜截面的 t 轴为参考坐标轴，考虑楔形体 ABC 在 n 方向力的平衡，由平衡方程

$$\sum F_n=0,\quad \sigma_\alpha dA-(\sigma_x dA\cos\alpha)\cos\alpha+(\tau_x dA\cos\alpha)\sin\alpha-(\sigma_y dA\sin\alpha)\sin\alpha+(\tau_y dA\sin\alpha)\cos\alpha=0$$

由切应力互等定理 $\tau_x=\tau_y$，则上式可简化为

$$\sigma_\alpha=\sigma_x\cos^2\alpha+\sigma_y\sin^2\alpha-2\tau_x\sin\alpha\cos\alpha$$

又由三角关系：

$$\left.\begin{aligned}\cos^2\alpha&=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\\ \sin^2\alpha&=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\\ 2\sin\alpha\cos\alpha&=\sin 2\alpha\end{aligned}\right\}\tag{a}$$

将其代入前式，可得

$$\sigma_\alpha=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha-\tau_x\sin 2\alpha\tag{7-1}$$

考虑楔形体在 t 方向力的平衡，则由平衡方程

$$\sum F_t=0,\quad \tau_\alpha dA-(\sigma_x dA\cos\alpha)\sin\alpha-(\tau_x dA\cos\alpha)\cos\alpha+(\sigma_y dA\sin\alpha)\cos\alpha+(\tau_y dA\sin\alpha)\sin\alpha=0$$

由切应力互等定理 $\tau_x=\tau_y$，简化后得

$$\tau_\alpha=(\sigma_x-\sigma_y)\sin\alpha\cos\alpha+\tau_x(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$$

再由式(a)所列的三角关系，得

$$\tau_\alpha=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha+\tau_x\cos 2\alpha\tag{7-2}$$

这样，利用式(7－1)和式(7－2)，就可以从单元体上的已知应力 σ_x、σ_y、τ_x 和 τ_y，求得任意斜截面上的正应力 σ_α 和切应力 τ_α。并且由此两式出发，还可求得单元体的极值正应力和极值切应力。所以，这两个方程也称为**应力转换方程**。

利用式(7－1)、式(7－2)进行计算时，一定要注意正负号的规定：正应力以拉应力为正，压应力为负；切应力在其绕单元体内任一点为顺时针转向时为正，反之为负。例如在图 7－3 中，σ_x、σ_y、τ_x 和 σ_α、τ_α 均为正方向，而 τ_y 则为负方向。对于夹角 α，则规定从 x 轴转到斜截面的外法线 n，逆时针转向时的角度为正，反之为负。例如图 7－3 中的 α 角就是正值。

此外，还须注意上述两式的适用条件：斜截面必垂直于 $x-y$ 面；不仅适用 z 平面为无应力的平面应力状态，而且也适用于该面上只有正应力，而无切应力的情况。因为此正应力沿 $x-y$ 平面无分量，不会影响 σ_α、τ_α 式的推导结果。

2. 极值正应力和极值切应力

由式(7－1)和式(7－2)可以看出，斜截面上的应力 σ_α 和 τ_α 是随角 α 连续变化的，它们是以角 α 为参数的参数方程。为消去 α，现将式(7－1)等号右的 $\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$ 项移至等号左边，再将此式及式(7－2)的等号两侧平方后相加，即得如下 σ_α 与 τ_α 的数值关系方程

$$\left(\sigma_\alpha-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_\alpha^2=\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2 \tag{7-3}$$

由上式可知，当 $\tau_\alpha=0$，即将此代入式(7－2)得截面方位角 α_0 满足下式时

$$\tan 2\alpha_0=-\frac{2\tau_x}{\sigma_x-\sigma_y} \tag{7-4}$$

该面上的正应力 σ_α 有极值

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{max}\\ \sigma_{min}\end{matrix}\right.=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2} \tag{7-5}$$

极值正应力所在的平面，切应力为零。这个切应力为零的平面即称为**主平面**，主平面上的正应力称为**主应力**。

式(7－4)可确定 α_0 的两个数值，即主值 $\alpha_0\left(-\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha_0\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$ 和 $\alpha_0+90°$。这表明两个主平面是相互垂直的；同样，两个主应力也相互垂直。可以证明，当 $\sigma_x\geqslant\sigma_y$ 时，α_0 角对应 σ_{max} 方位，如图 7－4a 所示；反之，若 $\sigma_x<\sigma_y$，则 α_0 角对应 σ_{min} 方位。

在平面应力状态中，单元体上没有应力作用的平面也是一个主平面，如图 7－2和图 7－3 所示单元体垂直于 z 轴的平面也是主平面，它与另外两个主平面也互相垂直。在三个主平面上的主应力通常用 σ_1、σ_2 和 σ_3 来表示，并按代数值的大小顺序排列，即 $\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\sigma_3$。例如在式(7－5)中，当 σ_{max} 和 σ_{min} 均为正值时，可将其分别表示为 σ_1、σ_2；如求出的 σ_{max} 和 σ_{min} 出现负值，则应按主应力的代数值的排列次序，将其分别表示为 σ_1、σ_3 或 σ_2、σ_3。一点的应力状态，还可以用按主平面位置截取出的单元体及其上的主应力来表示，这种表示方法更为简单。

由式(7－3)还可看出，当 $\sigma_\alpha=\frac{(\sigma_x+\sigma_y)}{2}$，即将此式代入式(7－1)得截面方位角 α_1 满足下式时

$$\tan 2\alpha_1=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2\tau_x} \tag{7-6}$$

该面上的切应力 τ_α 有极值

$$\left.\begin{matrix}\tau_{max}\\ \tau_{min}\end{matrix}\right.=\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2} \tag{7-7}$$

在极值切应力作用面上正应力等于$\frac{(\sigma_x+\sigma_y)}{2}$,一般不为零。

式(7-6)可确定 α_1 及 $\alpha_1+90°$两个值。比较式(7-6)与式(7-4)可知

$$\tan 2\alpha_1 = -\cot 2\alpha_0 = \tan(2\alpha_0+90°)$$

$$\alpha_1=\alpha_0+45°$$

即极值切应力作用面与主平面成45°。

极值切应力作用面与极值正应力作用面的关系为:由 σ_{max}作用面顺时针转45°至 τ_{min}作用面,逆时针转45°至 τ_{max}作用面,如图7-4b所示。τ_{max}与 τ_{min}分别作用在相互垂直的平面上,大小相等、转向相反,符合切应力互等定理。

还须指出,例如在图7-4a中,当单元体由 $ABCD$ 位置转到图7-4b的 $A'B'C'D'$位置的过程中,其应力的数值也随之改变。但是,单元体的两互相垂直平面上的正应力之和则保持不变。例如单元体 $ABCD$ 上的两正应力之和 $\sigma_x+\sigma_y$,应等于单元体 $A'B'C'D'$上两主应力之和 $\sigma_{max}+\sigma_{min}$。这个关系建议读者自己证明。

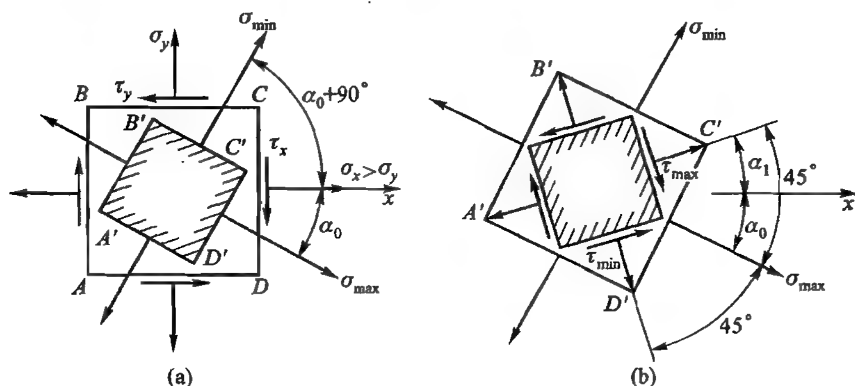


图7-4

上述求极值正应力、极值切应力以及作用面方位角的计算式也可由式(7-1)、式(7-2)求极值的条件求得。

例7-1 一单元体如图7-5所示,试用解析法求在 $\alpha=30°$斜截面上的应力,以及该点的主应力、极值切应力和它们作用面的方位。

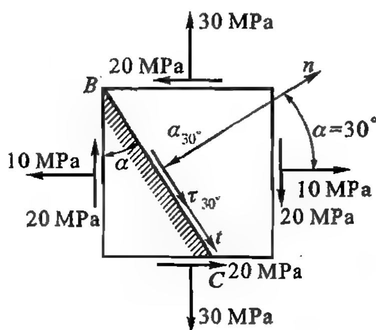


图7-5

解:

(1) 首先应搞清各量的正负和数值　这是获得正确求解结果的前提。在本题中,σ_x = 10 MPa,σ_y = 30 MPa,τ_x = 20 MPa,$\alpha=30°$,均为正值。

(2) 求 $\alpha=30°$斜截面上的应力　将上述已知值分别代入式(7-1)、式(7-2),得

$$\sigma_{30^\circ}=\frac{(10+30)}{2}\text{ MPa}+\frac{(10-30)}{2}\text{ MPa}\cos 60^\circ-20\text{ MPa}\sin 60^\circ=-2.32\text{ MPa}(\text{压应力})$$

$$\tau_{30^\circ}=\frac{(10-30)}{2}\text{ MPa}\sin 60^\circ+20\text{ MPa}\cos 60^\circ=1.34\text{ MPa}(\text{顺时针转向})$$

σ_{30°、τ_{30°的方向如图 7－5 所示。

(3) 求主应力及其作用面方位　将 σ_x、σ_y、τ_x 值代入式(7－5)，得

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{max}\\ \sigma_{min}\end{matrix}\right\}=\frac{(10+30)}{2}\text{ MPa}\pm\sqrt{\left(\frac{10\text{ MPa}-30\text{ MPa}}{2}\right)^2+(20\text{ MPa})^2}=\begin{cases}42.4\text{ MPa}(\text{拉应力})\\ -2.4\text{ MPa}(\text{压应力})\end{cases}$$

三个主应力为 $\sigma_1=\sigma_{max}=42.4\text{ MPa},\sigma_2=0,\sigma_3=\sigma_{min}=-2.4\text{ MPa}$

不难得到，$\sigma_1+\sigma_3=\sigma_x+\sigma_y=40\text{ MPa}$。利用这个关系可以校核计算结果的正确性。

现在确定主平面的位置。由式(7－4)，

$$\tan 2\alpha_0=-\frac{2\tau_x}{\sigma_x-\sigma_y}=\frac{-2\times 20\text{ MPa}}{(10-30)\text{ MPa}}=\frac{-2}{-1}=2$$

取主值

$$2\alpha_0=63°26'$$

得

$$\alpha_0=31°43'$$

因为 $\sigma_x<\sigma_y$，所以由 x 轴逆时针转 31°43′至 σ_{min}作用面法向，顺时针转 90°－31°43′＝58°17′至 σ_{max}作用面法向，最后得由主平面表示的单元体如图 7－6a 所示。

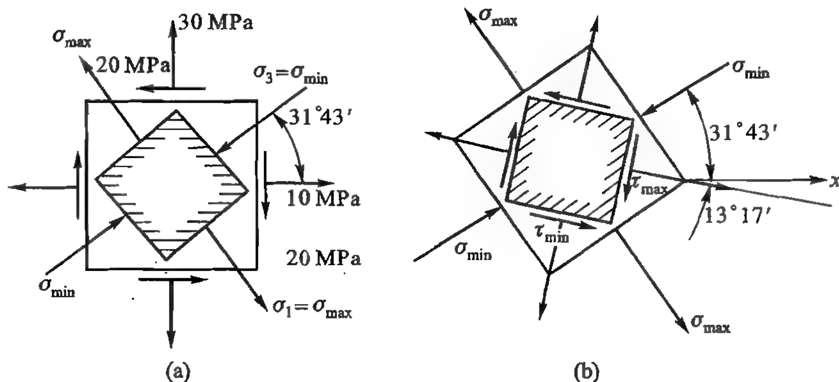


图 7－6

(4) 求极值切应力及其作用面方位　将 σ_x、σ_y 和 τ_x 的数值代入式(7－7)得极值切应力

$$\left.\begin{matrix}\tau_{max}\\ \tau_{min}\end{matrix}\right\}=\pm\sqrt{\left(\frac{10\text{ MPa}-30\text{ MPa}}{2}\right)^2+(20\text{ MPa})^2}=\pm 22.4\text{ MPa}$$

由 σ_{max}作用面逆时针转 45°，即 $\alpha_1=-58°17'+45°=-13°17'$对应 τ_{max}作用面，τ_{min}作用面与其垂直，如图 7－6b 所示。也可由式(7－6)求得 α_1

3. 应力圆

如取横坐标 σ 表示正应力，纵坐标 τ 表示切应力，则在该坐标面上，式(7－3)表示的是一个圆心在横坐标上$\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$处，半径为$\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2}$的圆(图7－7)。它图示了 σ_α 与 τ_α 的关系曲线，称为应力圆(或莫尔圆)。

如已知单元体 x、y 面上的应力 σ_x、τ_x 和 σ_y、τ_y，则可在 $\sigma-\tau$ 坐标面上得到应力圆上的两个点 D_x、D_y。连 D_x、D_y 直线交 σ 坐标轴上的 C 点，从而有$\overrightarrow{OC}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$，即得应力圆的圆心。由图中的几何关系$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}$，可得$\overrightarrow{CD}_x=\overrightarrow{CD}_y=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2}$，即为应力圆的半径，随之便可画出应力圆，这就是应力圆的一般画法。图中，我们假设 $\sigma_x>\sigma_y>0,\tau_x>0$，这并不失一般性，因为取不同值只影响作图时 D_x 和 D_y 的位置。

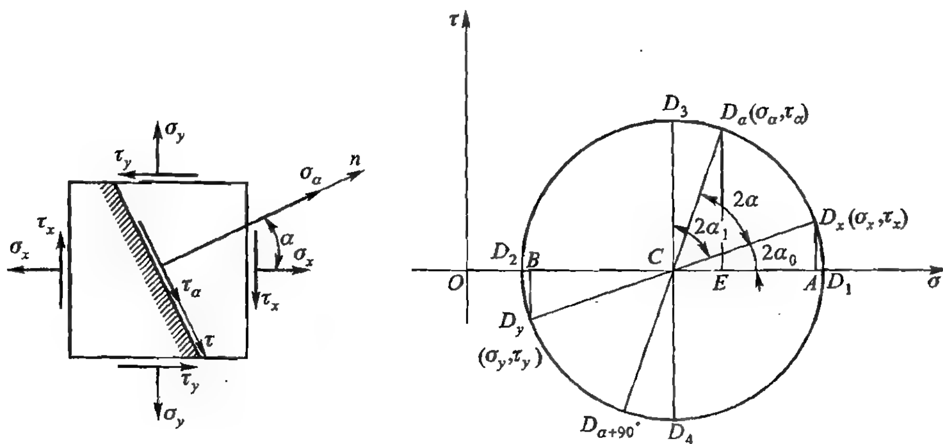


图 7－7

在应力圆上，从 D_x 点沿应力圆逆时针转 2α(假定 $\alpha>0$)得 D_α 点，其对应的横、纵坐标$\overrightarrow{OE}$、$\overrightarrow{ED}_\alpha$，即分别为 σ_α 和 τ_α。现证明如下

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE}&=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}_\alpha\cos(2\alpha_0+2\alpha)\\&=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}_x(\cos 2\alpha_0\cos 2\alpha-\sin 2\alpha_0\sin 2\alpha)\\&=\overrightarrow{OC}+(\overrightarrow{CD}_x\cos 2\alpha_0)\cos 2\alpha-(\overrightarrow{CD}_x\sin 2\alpha_0)\sin 2\alpha\\&=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha-\tau_x\sin 2\alpha\\&=\sigma_\alpha\end{aligned}$$

同理可证

$$\overrightarrow{ED_\alpha}=\tau_\alpha$$

由上可知，应力圆上的点与单元体的斜截面有如下三个对应关系：

点面对应——应力圆上某一点 D_α 的横、纵坐标值对应单元体某一截面上的正应力 σ_α 和切应力 τ_α。

转向相同——应力圆上由半径 CD_x 至 CD_α 的转向，与单元体上由 x 面转至 α 面的转向相同。

夹角 2 倍——应力圆上 x 面点 D_x 与 α 面点 D_α 半径的夹角为单元体上 x 面与 α 面夹角的 2 倍。

例如，图 7－7 应力圆上 D_1、D_2、D_3、D_4 点的坐标值，分别对应单元体上主平面及极值切应力作用面上的应力。应力圆上 D_x 点与 D_1 点间的圆周角 $2\alpha_0$，即为单元体主平面与 x 面方位角的 2 倍，且转向相同。显然当 D_x 点位于应力圆右半部（$\sigma_x \geq \sigma_y$）时，α_0 为 σ_{max} 作用面方位角，当 D_x 点位于应力圆左半部（$\sigma_x < \sigma_y$）时，α_0 为 σ_{min} 作用面的方位角。这就证明了前面提到的判断极值正应力 σ_{max} 及 σ_{min} 作用面方位角的规则。

例 7－2　试用应力圆求例 7－1 所示单元体在 $\alpha=30°$ 斜截面上的应力，以及主应力、极值切应力和它们作用面的方位。

解：

（1）选定比例尺　在 $\sigma-\tau$ 坐标面上（图 7－8a），选定比例尺，如图所示。

（2）画应力圆　据 x 面上的应力 $\sigma_x=10\ \text{MPa}$、$\tau_x=20\ \text{MPa}$，以及 y 面上的应力 $\sigma_y=30\ \text{MPa}$、$\tau_y=-20\ \text{MPa}$，得应力圆上的两点 D_x 及 D_y，连 D_x、D_y 直线交 σ 坐标轴于 C 点，以 C 点为圆心，CD_x 为半径画出应力圆。

（3）定 σ_α 和 τ_α　由 D_x 点沿应力圆逆时针转 60°得点 D_α，按选定比例尺量得

$$\sigma_\alpha=-\overline{OE}=-2\ \text{MPa},\quad \tau_\alpha=\overline{D_\alpha E}=1.5\ \text{MPa}$$

（4）定主应力、极值切应力和它们作用面的方位　由应力圆与坐标轴 σ 的交点 D_1、D_2

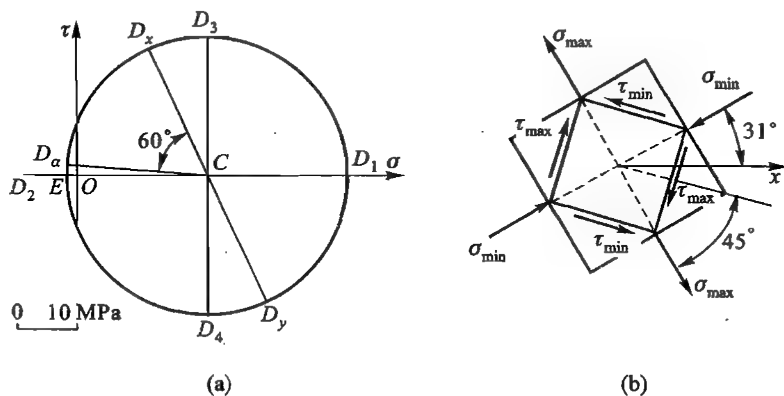


图 7－8

量得

$$\sigma_{max}=\overrightarrow{OD_1}=42\ \text{MPa},\sigma_{min}=-\overrightarrow{OD_2}=-2.5\ \text{MPa}$$

得

$$\sigma_1=42\ \text{MPa},\sigma_2=0,\sigma_3=-2.5\ \text{MPa}$$

由图量得$\angle D_xCD_2=2\alpha_0=62°$，即由$x$轴逆时针转$\alpha_0=31°$至$\sigma_{min}$作用面的法线。

显然，应力圆的最高和最低点D_3、D_4的纵坐标即为极值切应力τ_{max}、τ_{min}，由图量得

$$\tau_{max}=\overrightarrow{CD_3}=22.5\ \text{MPa},\tau_{min}=-\overrightarrow{CD_4}=-22.5\ \text{MPa}$$

由图可见，由D_1点逆时针转90°至D_3，即由σ_{max}作用面逆时针转45°至τ_{max}作用面。该点主平面和极值切应力作用面的方位如图7－8b所示。

例7－3 已知A点为平面应力状态，过该点两非正交截面上的应力如图7－9所示，求该点的主应力，主平面方位及AB、AC两截面法线之间的夹角α。

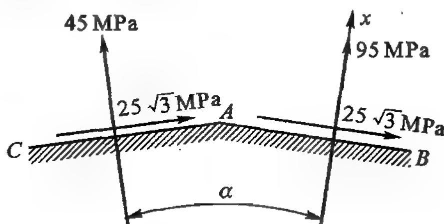


图7－9

解：

此题如用解析法求解，可取x面为AB面，AC面为α面，将其上给定的应力代入式(7－3)求得σ_y，再由式(7－5)和式(7－4)分别求得主应力和主平面方位，最后由式(7－1)或式(7－2)求得α角。显然，即使采用上述避免联立方程求解的技巧，计算还是比较烦琐。下面我们利用应力圆草图(不严格按比例画出)的几何关系，将使求解变得相当简单。

根据AB和AC面上的应力，可在$\sigma-\tau$面上定出应力圆上的两点D_x,D_α(图7－10a)。由于应力圆的圆心在σ轴上，所以连D_x、D_α直线，再作其中垂线$\overline{MC}$交σ轴于C点，C即为应力圆的圆心。以点C为圆心，$\overrightarrow{CD_x}$为半径画圆，即得应力圆草图。从该图几何关系可得

主应力 $$\left.\begin{matrix}\sigma_{max}\\\sigma_{min}\end{matrix}\right\}=\overrightarrow{OC}\pm\overrightarrow{CD_x}=\frac{95\ \text{MPa}+45\ \text{MPa}}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{95\ \text{MPa}-45\ \text{MPa}}{2}\right)^2+(25\sqrt{3}\ \text{MPa})^2}$$

$$=\begin{matrix}120\ \text{MPa}\\20\ \text{MPa}\end{matrix}$$

主平面方位 $$\tan 2\alpha_0=\frac{\overrightarrow{ED_x}}{\overrightarrow{CE}}=\frac{25\sqrt{3}\ \text{MPa}}{\left(\frac{95-45}{2}\right)\ \text{MPa}}=\sqrt{3}$$

得

$$\alpha_0=\frac{60°}{2}=30°$$

即由x面顺时针转30°至σ_{max}作用面。

AB与AC面法线之间的夹角

$$\alpha=90°-\angle D_xCE=90°-2\times30°=30°$$

各作用面方位的关系如图7－10b所示。

4. 平面应力状态的几种特殊情况

(1) 纯剪切应力状态

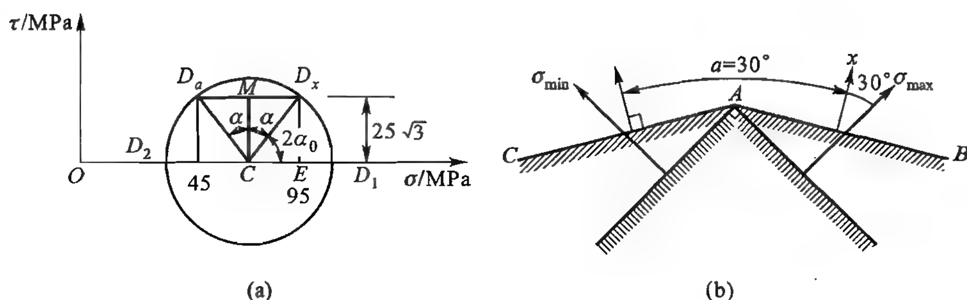


图 7－10

我们知道像图 7－11a、b 所示，在受扭圆截面直杆上的各点（除轴线外）及非纯弯曲直杆中性层上的各点，其单元体处于纯剪切应力状态（图 7－11c）。为了得到此单元体任意斜截面上的应力计算公式，可令式（7－1）、式（7－2）中的 $\sigma_x=\sigma_y=0$、$\tau_x=\tau$，从而得到

$$\sigma_\alpha=-\tau\sin 2\alpha \tag{7-8}$$

$$\tau_\alpha=\tau\cos 2\alpha \tag{7-9}$$

由以上两式可知，当 $\alpha=\mp45°$，正应力 σ_α 有极值 $\sigma_{max}=\tau$，$\sigma_{min}=-\tau$，而 $\tau_\alpha=0$；当 $\alpha=\frac{0°}{90°}$，切应力 τ_α 有极值 $\tau_{max}=\tau$，$\tau_{min}=-\tau$，而 $\sigma_\alpha=0$。即纯剪切应力状态的特点是：极值切应力作用面上正应力为零，主平面与纯剪切面成45°角，其上的主应力值 $\sigma_1=-\sigma_3=|\tau|$，如图 7－11d 所示。

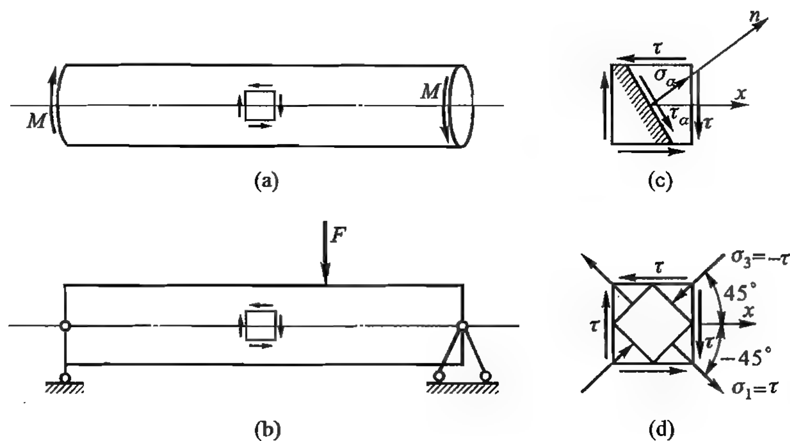


图 7－11

(2) 单向应力状态

根据第一章和第五章的理论，受轴向拉、压作用直杆上的任一点（图 7－

12a),以及受弯曲作用的梁上、下表面上的任一点(图 7－12b),其单元体受力均为单向应力状态,如图 7－12c 所示(若 $\sigma<0$,为压应力)。为求该单元体任意斜截面上的应力,仍可利用式(7－1)和式(7－2),令两式中 $\sigma_x=\sigma,\sigma_y=\tau_x=0$,即得

$$\sigma_\alpha=\frac{\sigma}{2}(1+\cos 2\alpha) \tag{7－10}$$

$$\tau_\alpha=\frac{\sigma}{2}\sin 2\alpha \tag{7－11}$$

由以上两式可知,当 $\alpha=0°$ 可得极值正应力 $\sigma_{max}=\sigma$(当 $\sigma<0$,为 σ_{min}),而 $\tau_\alpha=0$;当 $\alpha=\pm 45°$,有极值切应力 $\tau_{max}=\frac{\sigma}{2}$,$\tau_{min}=-\frac{\sigma}{2}$,而正应力 $\sigma_{45°}=\sigma_{-45°}=\frac{\sigma}{2}$。即单向应力状态的特点是:**只有一个主应力不等于零,极值切应力作用面与主应力作用面成 45°角,其上的极值切应力绝对值和正应力值均等于主应力 σ 的一半**。

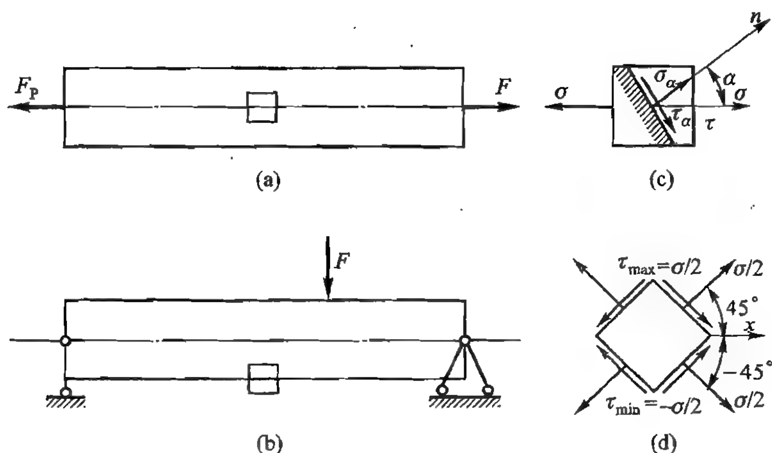


图 7－12

应当注意,如按极值切应力方位截取单元体(图 7－12d),其四个斜截面上除作用极值切应力外还有正应力,看起来似乎是一般平面应力状态,但实际上却是单向应力状态。

还需注意,这里单向应力状态斜截面上的应力公式(7－1)和(7－2)是指单元体的斜截面,而在§1－3 节轴向拉、压杆的斜截面是指杆件的斜截面,其上正应力、切应力公式与以上两式相同是由于拉(压)杆斜截面上的应力是均匀分布的。

（3）面内均拉或均压应力状态

如所取一点的单元体上的应力为 $\sigma_y=\sigma_x=\sigma$、$\tau_x=\tau_y=0$（图 7－13），则由式（7－2）得任一斜截面上的切应力 τ_α 均为零（即都是主平面），且由式（7－1）得各斜截面上的正应力 σ_α 均等于 σ。即该点处于面内均拉（当 $\sigma>0$），或面内均压（当 $\sigma<0$）的平面应力状态。例如受均匀内压作用薄壁球形容器壁中的各点就是面内均拉应力状态。

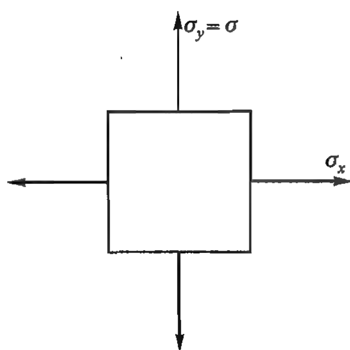


图 7－13

§7－3 空间应力状态

1. 空间应力状态的概念和实例

一般说来，自受力构件中截取出的空间应力状态的单元体，其三个互相垂直平面上的应力可能是任意方向的，但都可以将其分解为垂直于其作用面的正应力和平行于单元体棱边的两个切应力，如图 7－14a 所示。理论分析证明，与平面应力状态类似，对于这样的单元体，也都可以找到三对相互垂直的平面，在这些平面上没有切应力，而只有正应力。也就是说，按这三对平面截取的单元体只有三个主应力作用，如图 7－14b 所示。这是表示空间应力状态的常用方式。

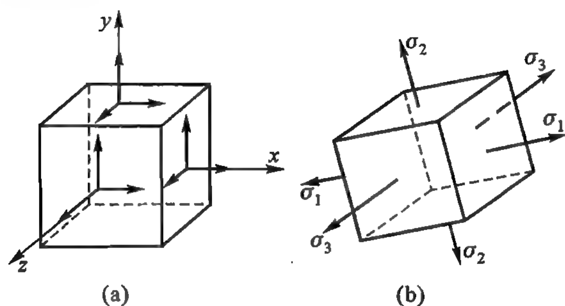


图 7－14

在工程实际中，也常接触到空间应力状态。例如在地层一定深度处所取的单元体（图 7－15），在竖向受到地层的压力，所以在上、下平面上有主应力 σ_3；但由于局部材料被周围大量材料所包围，侧向变形受到阻碍，故单元体的四个侧面也受到侧向的压力，因而有主应力 σ_1 和 σ_2，所以这一单元体是空间应力状

态。又如滚珠轴承中的滚珠与内环的接触处 K(图 7－16),也是三向压缩的应力状态。

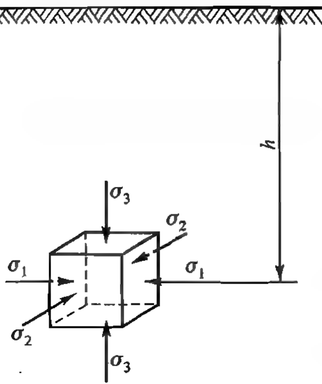


图 7－15

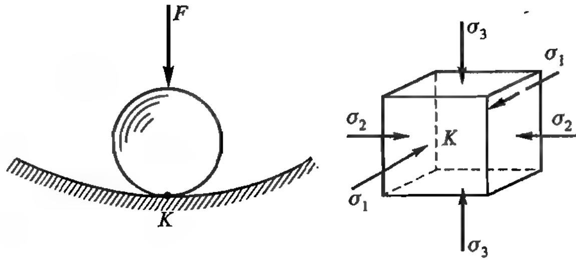


图 7－16

由前述可见,一点的应力状态总可以用三个主平面上的主应力来表示,这种表示方法比较简单明确。确切地说,应力状态的分类应按主应力的数目来划分,即:三个主应力均不等于零的应力状态为**三向应力状态**(或称**空间应力状态**);两个主应力不等于零的应力状态为**二向应力状态**;而只有一个主应力不等于零的应力状态则为**单向应力状态**。

2. 最大正应力和最大切应力

理论分析证明,对各类应力状态的单元体,第一主应力 σ_1 是各不同方向截面上正应力的最大值,而第三主应力 σ_3 则是各不同方向截面上正应力中的最小值,即

$$\sigma_{max}=\sigma_1,\sigma_{min}=\sigma_3 \tag{7－12}$$

理论分析还证明,各类应力状态的单元体,最大切应力之值为

$$\tau_{max}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2} \tag{7－13}$$

其作用面与最大主应力 σ_1 和最小主应力 σ_3 的所在平面各成顺时针向及逆时针向的 45°角,且与主应力 σ_2 的作用面垂直,如图 7－17 所示。最大切应力作用面上的正应力值为$\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}$。

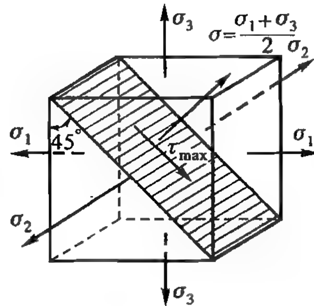


图 7－17

所以,对平面应力状态,要特别注意算得的 σ_{max} 及 σ_{min},只有分别为 σ_1 和 σ_3 时,由式(7－7)算得的极值切应力(也称主切应力)才是单元体各截面中

的最大切应力。例 7 - 1 就是这种情况。

3. 广义胡克定律

现在再来讨论空间应力状态下应力与应变的关系。在 §1 - 4 中曾介绍过轴向拉伸构件的变形计算，得到了单向应力状态下应力与应变的关系（图 7 - 18），即与应力方向一致的纵向应变为

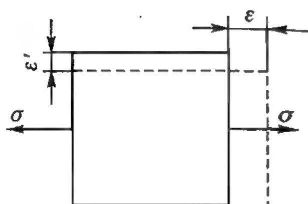


图 7 - 18

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

垂直于应力方向的横向应变为

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon = -\mu\frac{\sigma}{E}$$

在空间应力状态下，单元体同时受到 σ_1、σ_2 和 σ_3 的作用（图 7 - 19a）。此时若计算沿 σ_1 方向的第一棱边的变形，则由 σ_1 引起的应变（图 7 - 19b）为

$$\varepsilon'_1 = \frac{\sigma_1}{E}$$

因 σ_2 和 σ_3 而引起的应变（图 7 - 19c、d）则为：

$$\varepsilon''_1 = -\mu\frac{\sigma_2}{E}, \quad \varepsilon'''_1 = -\mu\frac{\sigma_3}{E}$$

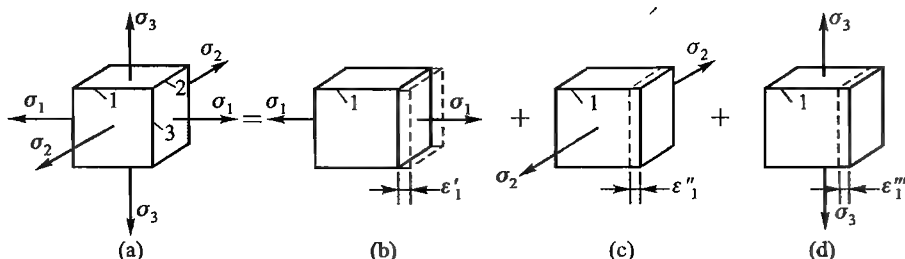


图 7 - 19

因此，材料为线弹性和各向同性条件下，根据叠加原理，沿主应力 σ_1 方向的总应变为

$$\varepsilon_1 = \varepsilon'_1 + \varepsilon''_1 + \varepsilon'''_1$$

即

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

同理可得：

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}[\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] \end{aligned}\right\} \quad (7-14)$$

式(7－14)给出了在空间应力状态下，任意一点处沿主应力方向的线应变与主应力之间的关系。通常称之为广义胡克定律。式中的 σ_1、σ_2、σ_3 均应以代数值代入，求出的 ε_1、ε_2、ε_3，若为正值则表示应变为伸长；负值则表示应变为缩短。与主应力的顺序类似，按代数值排列，这三个线应变的顺序是 $\varepsilon_1 \geqslant \varepsilon_2 \geqslant \varepsilon_3$。并且，沿 σ_1 方向的线应变 ε_1 是所有不同方向线应变中的最大值，

即

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 \tag{7-15}$$

对均匀各向同性线弹性体，切应力不引起线应变。因此，若单元体各面不是主平面，则只需将式(7－14)中各变量下标 1、2、3 相应改为 x、y、z，即得线应变 ε_x、ε_y、ε_z 与正应力 σ_x、σ_y、σ_z 之间的关系式。应用该式或式(7－14)，可通过测得构件表面任一点正交方向的线应变，求得相应方向的正应力。

§7－4 材料的破坏形式

前面，对各种应力状态进行了分析。实践证明，不同的材料在各种应力状态下，可能出现不同的破坏现象。因此，在分析构件在复杂应力状态下的强度时，还须考虑材料的破坏形式，并以此为依据来建立材料在复杂应力状态下的强度条件。为此，本节先讨论材料的破坏形式。

1. 材料破坏的基本形式

在前面的一些章节中，曾接触过一些材料的破坏现象，如果以低碳钢和铸铁两种材料为例，它们在拉伸(压缩)和扭转试验时的破坏现象虽然各有不同，但都可把它归纳为两类基本形式，即脆性断裂和塑性屈服。

例如，铸铁拉伸或扭转时，在未产生明显的塑性变形的情况下就突然断裂，材料的这种破坏形式，叫做脆性断裂。又如低碳钢在拉伸、压缩和扭转时，当试件的应力达到屈服点后，就会发生明显的塑性变形，使其失去正常的工作能力，这是材料破坏的另一种基本形式，叫做塑性屈服。至于铸铁压缩时的破坏，因在试件被剪断前材料已产生了明显的塑性变形，也属于塑性屈服的破坏形式。在常温、静载和一般应力状态下，脆性材料(例如铸铁、高碳钢等)的破坏形式是脆性断裂；而塑性材料(例如低、中碳钢，铝，铜等)的破坏形式是塑性屈服。

试验研究的结果表明，金属材料具有两种极限抵抗能力：一种是抵抗脆性断裂的极限抗力，例如，铸铁拉伸时，用抗拉强度 σ_b 来表示；另一种是抵抗塑性屈服的极限抗力，例如，低碳钢拉伸时，可用屈服时的切应力 τ_s 来表示。

材料在受力后是否发生破坏，这取决于构件的应力是否超过材料较弱的那种极限抗力。例如，杆件在轴向拉伸或压缩时，横截面上的拉应力或压应力最大，与轴线成 45°的斜截面上的切应力最大；圆杆扭转时，横截面上的切应力最

大，与轴线成45°角的斜截面上的拉应力最大。由于铸铁的抗拉能力最弱，抗压能力最强，抗剪能力居中，所以铸铁杆件拉伸或扭转时沿最大拉应力作用面断开，压缩破坏时沿接近最大切应力作用面(斜截面)剪断①。而低碳钢的抗拉、抗压极限抗力大于剪切抗力，所以低碳钢杆件破坏时，无论是拉伸、压缩或扭转均沿最大切应力作用面塑性滑移。

2. 应力状态对材料破坏形式的影响

材料的破坏形式是呈脆性断裂，还是呈塑性屈服，不仅由材料本身的性能所决定，还与材料的应力状态有很大关系。

试验证明，同一种材料在不同的应力状态下，会发生不同形式的破坏。也就是说，不同的应力状态将影响材料的破坏形式。例如，铸铁在拉伸时呈脆性断裂，而在压缩时则有较大的塑性变形，这就是一个明显的例子。又如，有环形凹槽的低碳钢拉杆(图7－20a)，由于凹槽处截面有显著改变，而产生了应力集中。此时轴向变形欲急剧增大，并使其横向变形显著收缩，但是这种横向收缩将受到凹槽周围材料的牵制，所以在凹槽处的单元体，除轴向应力 σ_1 外，其侧面上还同时存在主应力 σ_2 和 σ_3，处于三向拉伸应力状态(图7－20b)。在这种情况下，拉杆在凹槽处将呈脆性断裂。这种现象是普遍存在的。很多试验证明，在三向拉伸应力状态下，即使是塑性材料也会发生脆性断裂。但是，若材料处于三向压缩应力状态(如大理石在各侧面上受压缩)，即使是脆性材料，却表现为有较大的塑性。

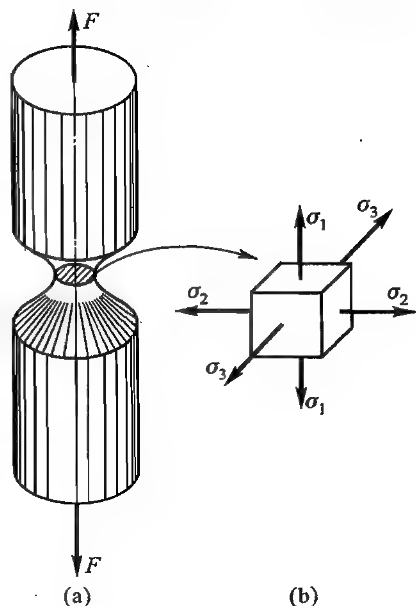


图7－20

由上述各例可知，压应力本身不能造成材料的破坏，而是由它所引起的切应力等因素在对材料的破坏起作用，构件内的切应力将使材料产生塑性变形，在三向压缩应力状态下，脆性材料也会发生塑性变形；拉应力则易于使材料产生脆性断裂，而三向拉伸的应力状态则使材料发生脆性断裂的倾向最大。这说明材料所处的应力状态，对其破坏形式有很大影响。

此外，变形速度和温度等对材料的破坏形式也有较大影响。这些内容将在

① 试验得出，铸铁杆压缩时，由于断裂面间的摩擦阻力的存在，沿与轴线成55°～60°的斜截面剪断。

第十章中再略加介绍。

§7-5 强度理论

1. 强度理论的概念

前面几章中，曾介绍了构件在轴向拉伸（或压缩）、扭转和弯曲时的强度计算，并建立了相应的强度条件。例如，轴向拉伸（或压缩）时的强度条件为

$$\sigma=\frac{F_N}{A}\leqslant[\sigma]=\frac{\sigma_u}{n}$$

式中的 σ_u 表示材料的极限应力，如屈服点 σ_s 或抗拉强度 σ_b。这些极限应力值可直接通过试验测得。所以说，上述的强度条件是直接与试验进行比较而建立的。

但在工程实际中，还经常遇到一些复杂变形的构件，其危险点并不是简单地处于单向应力状态或纯剪切应力状态，而是处于复杂应力状态。在此情况下，已不能采用将构件内的应力直接与极限应力比较的方法来确定构件的强度了。对于这类复杂应力状态下的构件，如何建立它的强度条件呢？本节就来讨论这个问题。

为解决这个问题，如果仍像对拉压构件那样，直接通过试验的方法来确定材料的极限应力，那么就得按 σ_1、σ_2 和 σ_3 的不同组合，对各种应力状态一一进行试验，以此来测定材料在各种复杂应力状态下的极限应力值。但由于在复杂应力状态下 σ_1、σ_2、σ_3 的组合是无穷的，而且为实现各种应力状态所需的试验设备和试验方法也较复杂，显然，这样做是不切合实际的。在这样的情况下，人们根据材料破坏的现象，总结材料破坏的规律，逐渐形成了这样的认识：认为材料的破坏是由某一个因素所引起的，对于同一种材料，无论处于何种应力状态，当导致它们破坏的这一共同因素达到某一个极限值，构件就会破坏。因此，可以通过简单拉伸的试验来确定这个因素的极限值，从而建立复杂应力状态下的强度条件。在长期的生产实践中，通过对材料破坏现象的观察和分析，人们对材料发生破坏的原因，提出了各种不同的假说。经过实践检验，证明在一定范围内成立的一些假说，通常称为**强度理论**，或称**破坏理论**。

2. 常用的强度理论

由上节讨论知道，材料破坏的基本形式可分为脆性断裂和塑性屈服两种。因此，强度理论也可分为两类：一类是关于脆性断裂的强度理论，另一类是关于塑性屈服的强度理论。从强度理论的发展史来看，最早提出的是关于脆性断裂的强度理论，通常采用的有最大拉应力理论和最大伸长线应变理论。这是因为远在 17 世纪时，大量使用的材料主要是建筑上用的砖、石和铸铁等脆性材料，观

察到的破坏现象多半是脆性断裂。到 19 世纪，由于生产的发展，科学技术的进步，在工程技术中，像低碳钢、铜等这类塑性材料的应用越来越多，并对材料发生塑性屈服的物理实质有了较多认识后，这时才提出了关于塑性屈服的强度理论，通常采用的有最大切应力理论和畸变能密度理论。

(1) 最大拉应力理论(第一强度理论)

这个理论认为，引起材料发生脆性断裂的主要因素是最大拉应力，无论材料处于何种应力状态，只要构件危险点处的最大拉应力 $\sigma_{max}=\sigma_1$ 达到材料的极限应力值 σ_u 时，就会引起材料的脆性断裂。根据这一强度理论，破坏条件为

$$\sigma_1=\sigma_u \tag{7-16}$$

式中的 σ_u 为材料在各种应力状态下所共有的极限应力，当然也适用于单向应力状态。因此可由简单拉伸试验来测定，其值即为试件断裂时的抗拉强度 σ_b。将 σ_b 除以安全因数后，即得到材料的许用拉应力 $[\sigma]$。于是，按此理论所建立的强度条件为

$$\sigma_1\leqslant[\sigma] \tag{7-17}$$

试验表明，这个理论对于脆性材料，例如铸铁、陶瓷、工具钢等较为适合(当三主应力中，存在压应力值超过最大拉应力值较多时不适用)。

(2) 最大伸长线应变理论(第二强度理论)

这个理论认为，引起材料发生脆性断裂的主要因素是最大伸长线应变 ε_{max}，无论材料处于何种应力状态，只要构件危险点处的最大伸长线应变 $\varepsilon_{max}=\varepsilon_1$ 达到某一个极限值 ε_u 时，就会引起材料的脆性断裂。根据这一理论，材料的破坏条件为

$$\varepsilon_1=\varepsilon_u$$

因材料在脆性断裂前的变形很小，可设材料在破坏前服从胡克定律，则在空间应力状态下，上式中的主应变 ε_1 由广义胡克定律式(7-14)求得

$$\varepsilon_1=\frac{1}{E}[\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3)]$$

而 ε_u 是各种应力状态共同的极限应变值，因而可由简单拉伸试验测出，其值为

$$\varepsilon_u=\frac{\sigma_b}{E}$$

式中 σ_b 为材料的抗拉强度。因此破坏条件可用应力表示为

$$\frac{1}{E}[\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3)]=\frac{\sigma_b}{E}$$

或

$$\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3)=\sigma_b \tag{7-18}$$

考虑安全因数后，可得按此理论而建立的强度条件为

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leqslant [\sigma] \tag{7-19}$$

试验指出，这个理论对脆性材料在拉伸－压缩的两向应力状态下，且压应力超过拉应力较多时是大致符合的。此外，石料或混凝土单向压缩沿纵截面裂开，其法向即为最大伸长应变方向也符合这一理论。

（3）最大切应力理论（第三强度理论）

这个理论认为，使材料发生塑性屈服的主要因素是最大切应力 τ_{max}，无论材料处于何种应力状态，只要构件中的最大切应力达到某一个极限切应力值 τ_u 时，就会引起材料的塑性屈服。按此理论，材料的破坏条件（或称屈服条件）为

$$\tau_{max} = \tau_u$$

在复杂应力状态下的最大切应力 τ_{max} 可由式(7－13)计算，即

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

而式中的极限切应力 τ_u 则可通过简单拉伸试验来测定，其值为屈服时试件横截面上的正应力 σ_s 的一半，即

$$\tau_u = \frac{\sigma_s}{2}$$

因此，破坏条件又可表示为

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_s}{2}$$

或

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s \tag{7-20}$$

考虑安全因数后，可得按此理论而建立的强度条件为

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leqslant [\sigma] \tag{7-21}$$

一些试验结果表明，对于塑性材料，例如常用的 Q235 钢、45 钢、铜、铝等，这个理论符合较好。缺点是未考虑中间主应力 σ_2 的影响。

（4）畸变能密度理论（第四强度理论）

构件受力后，其形状和体积都会发生改变，同时构件内部也积蓄了一定的应变能。因此，积蓄在单位体积内的应变能即应变能密度包括两个部分：因体积改变和因形状改变（畸变）而产生的应变能密度。

畸变能密度理论认为，使材料发生塑性屈服的主要原因，取决于畸变能密度。也就是说，无论材料处于何种应力状态，只要当其畸变能密度到达某一极限值时，就会引起材料的塑性屈服，而这个畸变能密度的极限值，则可通过简单拉伸试验来测定。

在这里，我们略去详细的推导过程，直接给出按这一理论而建立的破坏条件（或称屈服条件）和强度条件，分别为：

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]}=\sigma_s \qquad (7-22)$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]}\leqslant[\sigma] \qquad (7-23)$$

式中的 σ_s 为由拉伸试验测出的材料的屈服点，$[\sigma]$ 为材料的许用拉应力。

对于塑性材料，例如钢材、铝、铜等，这个理论比第三强度理论更符合试验结果。

在单向应力状态下，第三、第四强度理论的强度条件是一致的。而在其他应力状态下，无论三个主应力数值如何，可以证明式(7-21)不等号左侧总是大于式(7-23)不等号左侧，在纯剪切应力状态差别最大(达15%)。但由于式(7-21)简单，同时又偏于安全方面，所以在工程实际中，这两个理论都得到广泛应用。

上面介绍的根据四个强度理论而建立的强度条件，可将其归纳为如下的统一形式

$$\sigma_r\leqslant[\sigma] \qquad (7-24)$$

式中的 $[\sigma]$ 为根据拉伸试验而确定的材料的许用拉应力；σ_r 为各种应力状态下 σ_1、σ_2、σ_3 按不同强度理论而形成的某种组合，称为相当应力。对于不同的强度理论，它们分别为：

第一强度理论：$\sigma_{r1}=\sigma_1$

第二强度理论：$\sigma_{r2}=\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3)$

第三强度理论：$\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3$

第四强度理论：

$$\sigma_{r4}=\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]} \qquad (7-25)$$

这样，在进行复杂应力状态下的强度计算时，可按下述几个步骤进行：

① 从构件的危险点处截取单元体，计算出主应力 σ_1、σ_2、σ_3(图7-21a)。

② 选用适当的强度理论，算出相应的相当应力 σ_r，把复杂应力状态转换为具有等效的单向应力状态(图7-21b)。

③ 确定材料的许用拉应力 $[\sigma]$，将其与 σ_r 比较(图7-21c)，从而对构件进行强度计算。

复杂应力状态下构件的强度条件有两种形式。除上述的校核应力的形式(式7-24)之外，还可采用下列的校核安全因数的形式：

$$n=\frac{\sigma_u}{\sigma_r}\geqslant[n] \qquad (7-26)$$

式中：n——构件的工作安全因数；

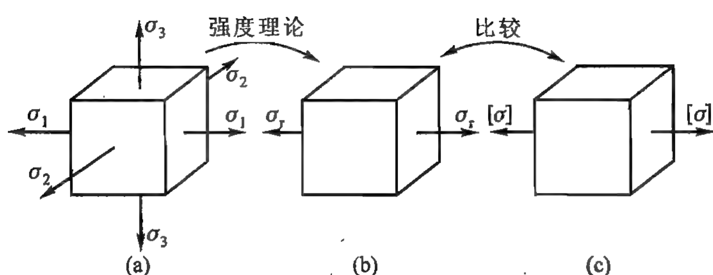


图 7－21

$[n]$——构件的许用安全因数；

σ_u——由简单拉伸试验测得的极限应力；

σ_r——对应于不同强度理论的相当应力。

3．强度理论的选择和应用

一般说来，受力构件处于复杂应力状态时，在常温、静载的条件下，脆性材料多数是发生脆性断裂，所以通常采用最大拉应力理论，或最大伸长线应变理论。由于最大拉应力理论应用简单，所以比最大伸长线应变理论使用得更为广泛。在通常情况下，塑性材料的破坏形式多为塑性屈服破坏。所以应该采用最大切应力理论，或畸变能密度理论。前者应用比较简单，后者可以得到较为经济的截面尺寸。

根据不同的材料选择强度理论，在多数情况下是合适的。但是，材料的脆性和塑性不是绝对的。正如在上节中所说的那样，不同的应力状态，例如三向拉伸或三向压缩应力状态，将影响材料产生不同的破坏形式。因此，也要注意到在少数特殊情况下，必须按照可能发生的破坏形式，来选择适宜的强度理论，对构件进行强度计算。

强度理论的一个重要应用，就是根据它来推知在某一种应力状态下的许用应力。例如，材料在纯剪切应力状态时的许用切应力$[\tau]$，就可根据强度理论导出。如图 7－11 所示的纯切应力状态，单元体的三个主应力为：

$$\sigma_1=\tau,\sigma_2=0,\sigma_3=-\tau$$

若采用第一强度理论来进行强度计算，则应将各主应力代入式(7－17)，得

$$\tau\leqslant[\sigma]$$

由此得材料的许用切应力为

$$[\tau]_1=[\sigma] \tag{7-27}$$

若采用第二强度理论，将各主应力代入式(7－19)，得

$$\tau\leqslant\frac{1}{1+\mu}[\sigma]$$

说明材料的许用切应力为

$$[\tau]_2=\frac{1}{1+\mu}[\sigma] \tag{7-28}$$

对于金属材料，泊松比 $\mu=0.23\sim0.42$，故

$$[\tau]=(0.7\sim0.8)[\sigma]$$

若采用第三强度理论，则由式(7－21)

$$\tau-(-\tau)\leqslant[\sigma]$$

得

$$\tau\leqslant\frac{1}{2}[\sigma]$$

故许用切应力为

$$[\tau]_3=0.5[\sigma] \tag{7-29}$$

同样，若采用第四强度理论，则由式(7－23)

$$\tau\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}}[\sigma]$$

故许用切应力为

$$[\tau]_4=\frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}\approx0.6[\sigma] \tag{7-30}$$

实际上，在第三章圆轴扭转问题中，通常规定的许用切应力为：

$$\left.\begin{array}{l}\text{脆性材料：}[\tau]=(0.8\sim1.0)[\sigma]\\ \text{塑性材料：}[\tau]=(0.5\sim0.6)[\sigma]\end{array}\right\} \tag{7-31}$$

这就是根据上述强度理论导出的，这个结果也得到了试验的验证。

由上可知，对纯剪切应力状态，四种强度理论的强度条件也可统一写为：

$$\tau\leqslant[\tau]_i\quad(i=1,2,3,4) \tag{7-32}$$

式中的许用切应力 $[\tau]_i$ 对四个强度理论依次取式(7－27)～式(7－30)的值。

下面以受内压力作用的薄壁圆筒为例，说明强度理论在强度计算中的应用。

工程实际中经常遇到薄壁圆筒的容器，像蒸汽锅炉、液压缸、储能器等。设一薄壁圆筒如图 7－22a 所示，圆筒容器内部受到压强为 p 的压力作用，其壁厚 δ 远小于圆筒平均直径 D。一般规定，$\delta\leqslant\frac{1}{10}D$ 的圆筒，叫做薄壁圆筒。

由于容器的器壁较薄，在内压力的作用下，在圆筒筒壁的纵向和横向截面上，只有拉应力作用，而且近似认为拉应力沿壁厚方向是均匀分布的。

为计算圆筒筒壁在纵向截面上的应力，可用截面法以通过圆筒直径的纵向截面将圆筒截为两半，取下半部长为 l 的一段圆筒(连同其内所装的气体或液体)为研究对象，如图 7－22b 所示。设圆筒纵向截面上的周向应力为 σ_t，并将筒内的压力视为作用于圆筒的直径平面上，则由平衡方程

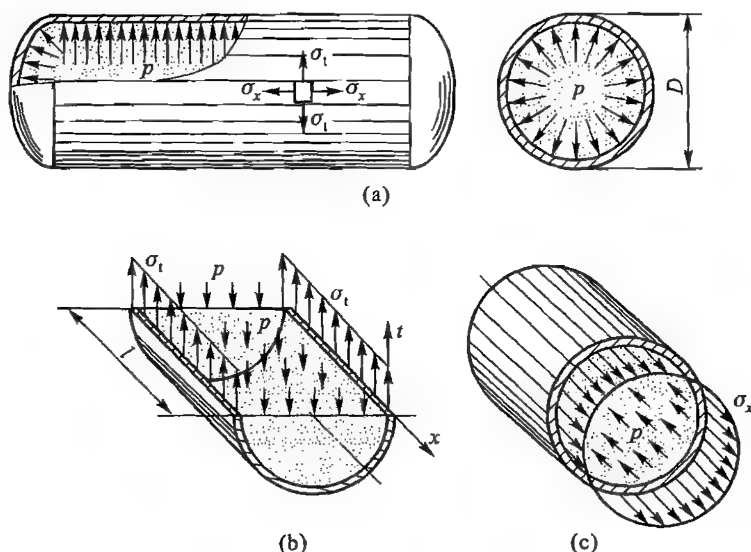


图 7－22

$$\sum F_t = 0, \quad 2(\sigma_t \cdot \delta \cdot l) - p \cdot D \cdot l = 0$$

得

$$\sigma_t = \frac{pD}{2\delta} \tag{7-33}$$

式中：σ_t——直径截面上的应力；

D——圆筒的平均直径；

δ——筒壁的厚度。

若以横截面将圆筒截开，取左边部分为研究对象，如图 7－22c 所示，并设圆筒横截面上的轴向应力为 σ_x，则由平衡方程

$$\sum F_x = 0, \quad \sigma_x \cdot \delta \cdot \pi D - p\frac{\pi D^2}{4} = 0$$

得

$$\sigma_x = \frac{pD}{4\delta} \tag{7-34}$$

由于 $D >> \delta$，则由上两式可知，圆筒容器内的内压强 p 远小于 σ_t 和 σ_x，因而垂直于筒壁的径向应力很小，可以忽略不计。如果在筒壁上按通过直径的纵向截面和横向截面截取出一个单元体，则此单元体处于平面应力状态，如图 7－22a 所示。作用于其上的主应力为：

$$\sigma_1 = \sigma_t = \frac{pD}{2\delta}, \quad \sigma_2 = \sigma_x = \frac{pD}{4\delta}, \quad \sigma_3 = 0$$

因为薄壁圆筒常用像低碳钢这类的塑性材料制成，所以可采用最大切应力理论，或畸变能密度理论来建立强度条件。将单元体上各主应力代入式(7－21)和式(7－23)，得：

$$\sigma_{r3}=\frac{pD}{2\delta}\leqslant[\sigma] \tag{7-35}$$

$$\sigma_{r4}=\frac{\sqrt{3}pD}{4\delta}\leqslant[\sigma] \tag{7-36}$$

利用上面两式，即可对薄壁圆筒进行强度校核，或选择圆筒壁厚和确定许用内压。

例 7－4 一根实心铸铁圆轴两端受扭转力偶矩 $M=540\ \text{N}\cdot\text{m}$ 的作用(图 7－23a)，材料的抗拉极限应力 $\sigma_b=139\ \text{MPa}$，求圆轴发生破坏的临界半径 r。

解：

(1) 确定危险截面和危险点 因圆轴为等截面直杆；且仅两端受外力偶作用，各截面扭矩相等，$T=M$，故各截面均为危险截面。危险点发生在扭转切应力分布最大的周边各点，且为纯剪切应力状态(图 7－23b)。

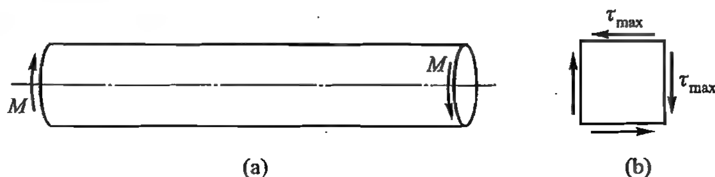


图 7－23

(2) 计算危险点的主应力 由式(3－12)

$$\tau_{max}=\frac{Tr}{\frac{\pi}{2}r^4}=\frac{540\ \text{N}\cdot\text{m}r}{\frac{\pi}{2}r^4}=\frac{343.8\ \text{N}\cdot\text{m}}{r^3}$$

得主应力

$$\sigma_1=-\sigma_3=\tau_{max}=\frac{343.8\ \text{N}\cdot\text{m}}{r^3}$$

(3) 选择强度理论，计算相当应力 因铸铁是脆性材料，最大压应力值未超过最大拉应力值，所以选择最大拉应力理论，相当应力 $\sigma_{r1}=\sigma_1$，破坏条件为 $\sigma_1=\sigma_b$。

(4) 确定圆轴破坏的临界半径 将 σ_1 代入破坏条件，得

$$\frac{343.8\ \text{N}\cdot\text{m}}{r^3}=139\times10^6\ \text{N/m}^2$$

得

$$r=\sqrt[3]{\frac{343.8\ \text{N}\cdot\text{m}}{139\times10^6\ \text{N/m}^2}}=1.35\times10^{-2}\ \text{m}=13.5\ \text{mm}$$

即使圆轴脆断的临界半径为 13.5 mm

例 7-5　一工字形截面焊接钢梁如图 7-24a 所示，已知 $q=40\ \text{kN/m}$，$F=620\ \text{kN}$；截面的惯性矩 $I_z=2.13\times10^{-3}\ \text{m}^4$，截面的最大静矩 $S^*_{z\max}=2.93\times10^{-3}\ \text{m}^3$；材料的许用应力 $[\sigma]=160\ \text{MPa}$。试分别按第三和第四强度理论对梁的强度作全面校核。

解：

（1）确定危险截面和危险点　作剪力图和弯矩图如图 7-24b 所示。根据内力图及剪切弯曲时横截面上正应力 σ 和切应力 τ 的分布规律（图 7-24c）可知，梁的最大正应力发生在跨中截面 E 下侧的点 1（上侧为等值压应力），是单向应力状态；最大切应力发生在两支座里侧 A、B 截面的中性轴上（点 2），为纯剪切应力状态；第三组危险点发生在弯曲正应力 σ 和弯曲切应力都比较大的 C、D 截面（偏支座一侧）的翼缘和腹板交界处（点 3，3′），为一般平面应力状态。由于对称性，现将左半段梁危险点 1、2、3 单元体的受力示于图 7-24d。

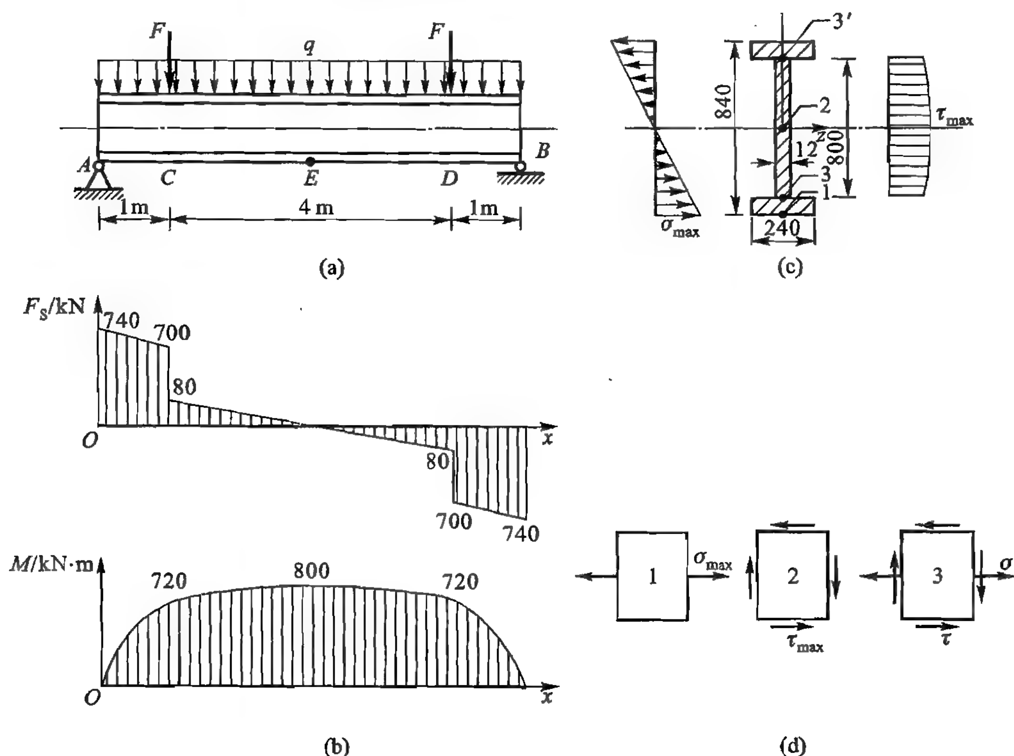


图 7-24

（2）最大正应力作用点的强度校核　由图 7-24d 所示，对点 1：$\sigma_1=\sigma_{\max}$，$\sigma_2=\sigma_3=0$，将其代入第三、第四强度理论所得强度条件是一致的，即

$$\sigma_{\max}\leqslant[\sigma]$$

将有关数据代入式（5-8）

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}y_{\max}}{I_z}=\frac{800\times10^3\ \text{N}\cdot\text{m}\times420\times10^{-3}\ \text{m}}{2.13\times10^{-3}\ \text{m}^4}$$

$$=158\ \text{MPa}<[\sigma]$$

强度条件满足。

(3) 最大切应力作用点的强度校核　由图 7－24d,对于点 2 为纯剪切应力状态,将有关数据代入式(5－19),其作用的切应力

$$\tau_{max}=\frac{F_S S_{z\max}^*}{I_z d}=\frac{740\times10^3\ \text{N}\times2.93\times10^{-3}\ \text{m}^3}{2.13\times10^{-3}\ \text{m}^4\times12\times10^{-3}\ \text{m}}$$

$$=84.8\ \text{MPa}$$

据强度条件 $\tau_{max}\leqslant[\tau]_i$(式 7－32),如按第三强度理论,

$$[\tau]_3=\frac{[\sigma]}{2}=\frac{160}{2}\ \text{MPa}=80\ \text{MPa},$$

则

$$\tau_{max}=84.8\ \text{MPa}>[\tau]_3$$

且

$$\frac{\tau_{max}-[\tau]_3}{[\tau]_3}=\frac{84.8\ \text{MPa}-80\ \text{MPa}}{80\ \text{MPa}}=6\%>5\%$$

故强度不够。

如按第四强度理论,

$$[\tau]_4=\frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}=\frac{160\ \text{MPa}}{\sqrt{3}}=92.4\ \text{MPa}$$

故

$$\tau_{max}=84.8\ \text{MPa}<[\tau]_4$$

强度条件满足。

(4) 正应力和切应力都比较大的点 3 的强度校核　对于图 7－24d 所示点 3 单元体的应力,由式(5－3)

$$\sigma=\frac{M_c y_3}{I_z}=\frac{720\times10^3\ \text{N}\cdot\text{m}\times400\times10^{-3}\ \text{m}}{2.13\times10^{-3}\ \text{m}^4}$$

$$=135\ \text{MPa}$$

由式(5－17)

$$\tau=\frac{F_S S_z^*}{I_z d}$$

式中 S_z^* 为点 3 一侧翼缘面积对中性轴 z 的静矩,即

$$S_z^*=240\times10^{-3}\ \text{m}\times20\times10^{-3}\ \text{m}\times410\times10^{-3}\ \text{m}$$

$$=1.97\times10^{-3}\ \text{m}^3$$

将 S_z^* 及其他有关数据代入式(5－17),得

$$\tau=\frac{700\times10^3\ \text{N}\times1.97\times10^{-3}\ \text{m}^3}{2.13\times10^{-3}\ \text{m}^4\times12\times10^{-3}\ \text{m}}=54\ \text{MPa}$$

由式(7－5)该点的三个主应力为

$$\sigma_1=\frac{\sigma}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2+\tau^2},\quad \sigma_2=0,\quad \sigma_3=\frac{\sigma}{2}-\sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2+\tau^2}$$

将其和 σ、τ 的数值分别代入式(7-25)后两式,得

$$\sigma_{r3}=\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}=\sqrt{(135\ \text{MPa})^2+4\times(54\ \text{MPa})^2}$$
$$=173\ \text{MPa}>[\sigma]$$
$$\frac{\sigma_{r3}-[\sigma]}{[\sigma]}=\frac{(173-160)\ \text{MPa}}{160\ \text{MPa}}=8.1\%>5\%$$

强度不够。

$$\sigma_{r4}=\sqrt{\sigma^2+3\tau^2}=\sqrt{(135\ \text{MPa})^2+3\times(54\ \text{MPa})^2}=164\ \text{MPa}>[\sigma]$$
$$\frac{\sigma_{r4}-[\sigma]}{[\sigma]}=\frac{(164-160)\ \text{MPa}}{160\ \text{MPa}}=2.5\%<5\%$$

强度条件满足。

(5) 结论　按第三强度理论,危险点2、3处强度不够,但按第四强度理论,全梁强度条件均满足。

必须指出,对焊接工字形截面的梁,在弯矩和剪力都比较大的截面的翼缘和腹板交界处的点可能是危险点。但对轧制工字型钢,因在该处有较大的过渡圆角,一般不会发生强度不足。

小　结

1. 本章讨论了应力状态理论、材料破坏的基本形式和强度理论,其目的是分析材料的破坏现象,解决复杂应力状态下构件的强度计算问题。本章的概念性较强,应着重掌握一点的应力状态、主应力等概念,熟悉平面应力状态的分析与计算,以及正确应用四个常用的强度理论。

2. 应力状态的概念和理论是解释材料破坏现象和建立强度条件的基础。一点的应力状态是指通过构件内一点各截面上的应力情况。可以用围绕该点所截取单元体三对正交平行截面上的应力表示,当单元体上的应力已知时,就可用截面法求得任一斜截面上的应力。因此,研究点的应力状态的首要关键就是要围绕该点截取其面上应力已知(或可求)的单元体。对于杆件来说,首先应取单元体的一对平行平面为横截面,其他两对平行平面与其正交且应力可求。

3. 无论什么受力情况,构件内任一点至少可以找到一个方位的单元体,其三对正交平行平面为主平面,分别作用主应力 $\sigma_1\geq\sigma_2\geq\sigma_3$,而其法线过 σ_1、σ_3 角分线且与 σ_2 作用面垂直的平面上有最大切应力 $\tau_{max}=\dfrac{\sigma_1-\sigma_3}{2}$;对平面应力状态,任意两正交斜截面上的正应力之和 $\sigma_\alpha+\sigma_{\alpha+90°}=\sigma_x+\sigma_y$,切应力互等且转向相反 $\tau_\alpha=-\tau_{\alpha+90°}$。掌握这些规律有助于对应力状态的分析和问题的求解。

4. 要注意本章对平面应力状态分析得出的七个公式(式(7-1)~式(7-7))的适用条件和求解技巧。在求解具体问题时,过一点任一方位的截面既可

视为是某一斜截面，也可视为是 x 面；当需要应用多个公式时，应首先确定简捷的求解路径，尽量避免联立求解方程。

5. 平面应力状态下，应力圆与单元体的对应关系是：点面对应、转向相同、夹角2倍。要充分发挥应力圆在记忆公式、判断主应力作用面方位和简便求解等问题时的功能。

6. 强度计算的关键是正确确定危险截面和危险点，以及选择适合的强度理论。对于杆件，首先要根据内力图确定危险截面的位置，再根据应力沿危险截面的分布规律确定危险点及相应单元体上的应力。要根据材料的破坏形式选择适用的强度理论，一般应力状态下的脆性材料，以及三向受拉应力状态下的塑性材料，破坏形式为脆断，应选第一或第二强度理论；一般应力状态下的塑性材料，以及三向受压状态下的脆性材料，破坏形式为塑性屈服，应选用第三或第四强度理论。

7. 四种强度理论的强度条件为

$$\sigma_r \leqslant [\sigma]$$

式中四个强度理论的相当应力依次为

$$\sigma_{r1} = \sigma_1$$

$$\sigma_{r2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

对于单向应力状态　$\sigma_{r1} = \sigma_{r2} = \sigma_{r3} = \sigma_{r4} = \sigma$

对于纯剪切应力状态　$\sigma_{r1} = \tau, \sigma_{r2} = (1+\mu)\tau, \sigma_{r3} = 2\tau, \sigma_{r4} = \sqrt{3}\tau$

对于单向应力状态与纯剪切应力状态的组合

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \quad \sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

思考题

7-1　比较下列概念的区别：正应力与主应力；极值切应力与最大切应力；两向应力状态与平面应力状态；三向应力状态与复杂应力状态。

7-2　试述点单元体的几何与受力的特征。为什么它可以表示一点的应力状态？如采用柱坐标、点的正六面单元体能否应用？

7-3　过一点在最大正应力作用的截面上有无切应力？在最大切应力作用的截面上有无正应力？

7-4　一梁如图 7-25 所示，图中给出了单元体 A、B、C、D、E 的应力情况。试指出并改正各单元体上所给应力的错误。

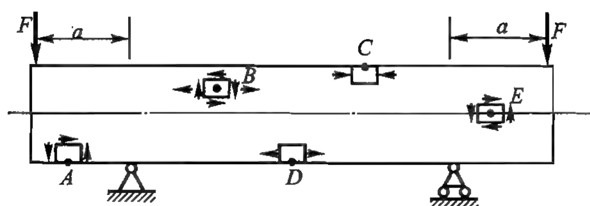


图 7－25

7－5 应用式(7－1)和式(7－2)时，对 x,y 轴及斜截面的方位有何限制？计算图 7－26a、b 两单元体所示斜截面上的正应力 σ_α 和切应力 τ_α 是否仍可应用该二式？为什么？

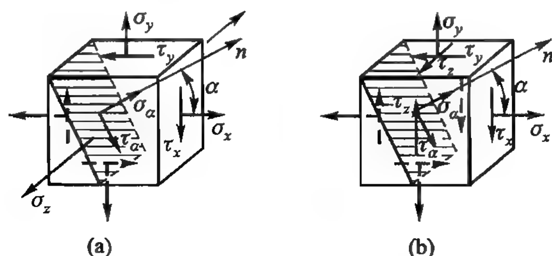


图 7－26

7－6 图 7－27 所示受拉力 F 作用的板条，侧表面均为自由表面，试证明尖角点($0° < \theta < 180°$)A 为零应力状态。

7－7 试证明对平面应力状态有关系式 $\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+90°} = \sigma_x + \sigma_y$，$\tau_\alpha = -\tau_{\alpha+90°}$。

7－8 图 7－28 所示 A 点为平面应力状态，p、q 为过 A 点成夹角为任意值 β 的两斜截面。试证明：p 截面上的应力 σ_p、τ_p 在 q 截面法线上投影之和，等于 q 截面上的应力 σ_q、τ_q 在 p 截面法线上投影之和。即有如下应力互换定律：

$$\sigma_p \cos\beta + \tau_p \cos(\beta + 90°) = \sigma_q \cos\beta + \tau_q \cos(\beta - 90°)$$

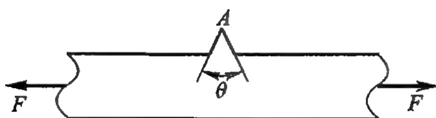


图 7－27

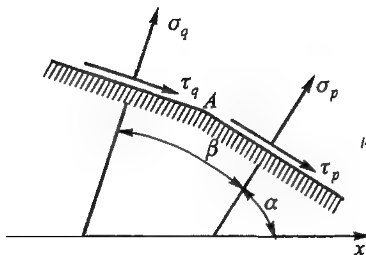


图 7－28

7－9 根据图 7－29 所示楔形体 x 向的静力平衡方程 $\sum F_x = 0$，导出确定主应力作用平

面方位角 α_0 的另一个不同于式(7-4)的计算式。

7-10 对图7-30所示单元体,若为单向应力状态或纯剪切应力状态,试据式(7-5)分别导出 σ_x、σ_y 及 τ_x 值之间应满足的关系式。

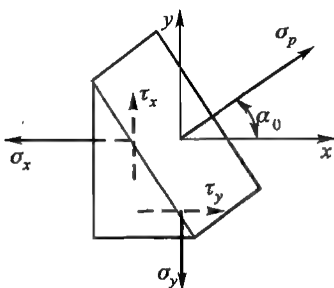


图 7-29

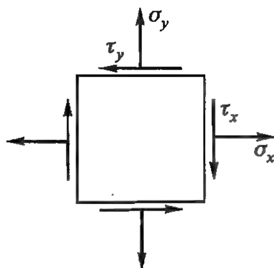


图 7-30

7-11 试绘出如下应力状态的应力圆草图并说明其特点:

(1) 单向拉伸和压缩应力状态;

(2) 纯剪切应力状态;

(3) 面内均拉或均压应力状态。

7-12 图7-31所示的平面应力状态是杆件剪切弯曲、弯扭组合及扭拉或扭压组合变形所遇到的一种应力状态,试分析其三个主应力、最大切应力和它们的作用面方位有何特点?

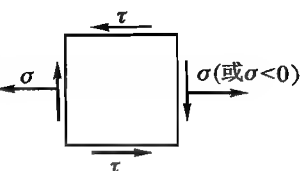


图 7-31

7-13 两点 A、B 的单元体的方位及其各面上的应力均不相同,如何判断两点的应力状态是否相同?

7-14 "有正应力作用的方向必定有线应变","无线应变的方向必定无正应力","线应变最大的方向正应力也最大",这些提法是否都对?为什么?

7-15 薄壁圆筒容器如图7-32所示,当在均匀内压作用下发生破坏时,钢制或铸铁圆筒均出现纵向裂口,且钢筒裂口平面与径向面成45°,铸铁裂口平面与径向面重合,试分析其原因。

7-16 试分别按第三、第四强度理论写出图7-33a、b两单元体的屈服条件,判断哪个单元体先发生或同时发生屈服破坏时,$|\sigma|$与$|\tau|$之间应满足的关系。

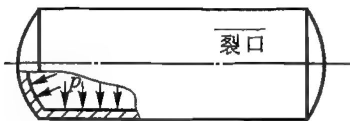


图 7-32

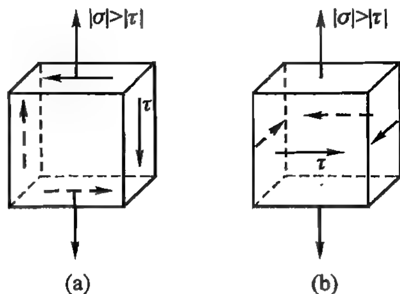


图 7-33

7－17 冬天自来水管因其中的水结冰而被胀裂，但冰为什么不会因受水管的反作用力而被压碎呢？

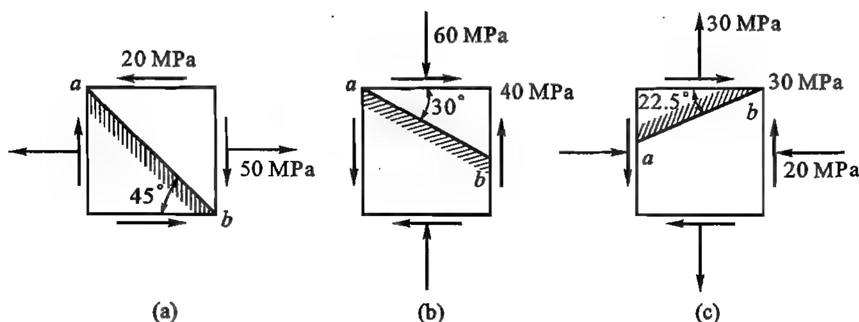
7－18 当厚玻璃杯倒入开水而破裂时，是从内壁先裂开，还是先从外壁先裂开？为什么？

习 题

7－1 直径 $d=20$ mm 的拉伸试件，当与杆轴成 45°角斜截面上的切应力 $\tau=150$ MPa 时，杆表面上将出现滑移线。求此时试件的拉力 F。

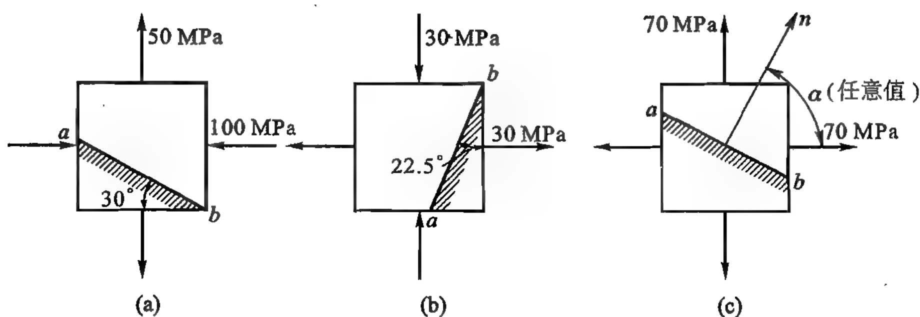
7－2 在拉杆的某一斜截面上，正应力为 50 MPa，切应力为 50 MPa。试求最大正应力和最大切应力。

7－3 已知应力状态如图 a、b、c 所示，试用解析法求指定斜截面 ab 上的应力，并画在单元体上。



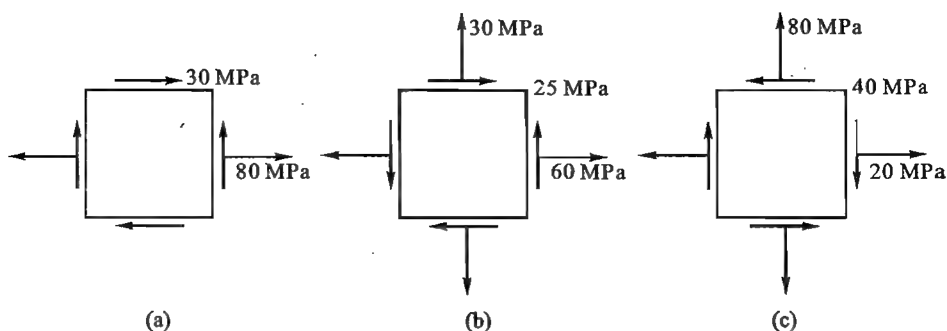
题 7－3 图

7－4 已知应力状态如图 a、b、c 所示，试据应力圆的几何关系求指定斜截面 ab 上的应力，并画在单元体上。



题 7－4 图

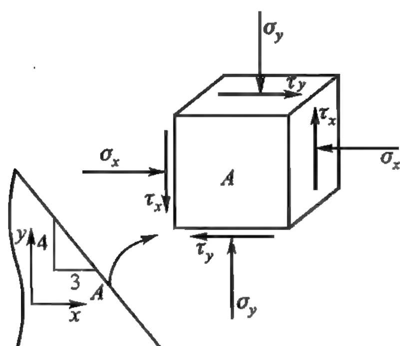
7-5 试求图示各单元体的三个主应力、最大切应力和它们的作用面方位，并画在单元体图上。



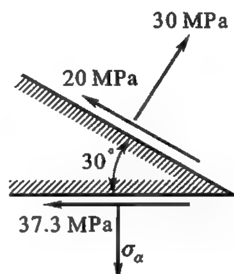
题 7-5 图

7-6 一土坡斜面及前、后表面均为自由表面。已知表面点 A 的水平面上受压应力 $\sigma_y = -50$ MPa，求点 A 单元体上的应力分量 σ_x、τ_x、τ_y 及主应力 σ_1、σ_2、σ_3 和最大切应力 τ_{max}，并指出它们作用面的方位。

7-7 已知一点为平面应力状态，过该点两平面上的应力如图所示，求 σ_α 及主应力、主方向和最大切应力。



题 7-6 图



题 7-7 图

7-8 一圆轴受力如图所示，已知固定端横截面上的最大弯曲应力为 40 MPa，最大扭转切应力为 30 MPa，因剪力而引起的最大切应力为 6 kPa。

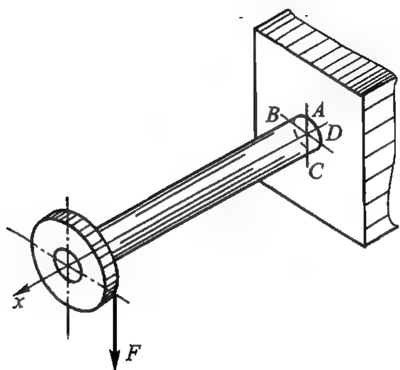
(1) 用单元体画出在 A、B、C、D 各点处的应力状态；

(2) 求 A 点的主应力和最大切应力及其作用面的方位。

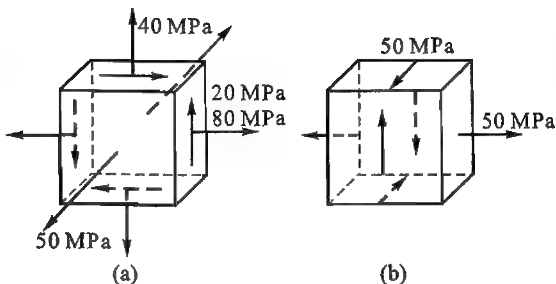
7-9 求图示各应力状态的主应力、最大切应力以及它们的作用面的方位。

7-10 设地层为石灰岩，泊松比 $\mu = 0.2$，密度 $\rho = 2.55 \times 10^3$ kg/m^3。试计算离地面 400 m深处的主应力（岩层可视为半无限体，在岩层面内各方向线应变为零）。

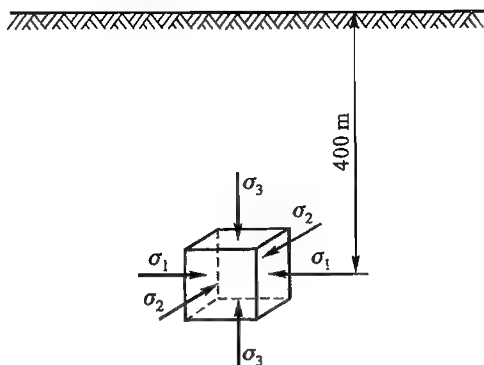
7-11 图示一钢制圆截面轴，直径 $d = 60$ mm，材料的弹性模量 $E = 210$ GPa。泊松比 $\mu = 0.28$，用电测法测得 A 点与水平线成 45°方向的线应变 $\varepsilon_{45°} = 431 \times 10^{-6}$，试求轴受的外力偶矩 M。



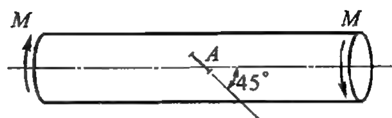
题 7－8 图



题 7－9 图



题 7－10 图

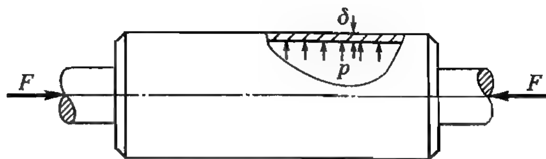


题 7－11 图

7－12 列车通过钢桥时，在大梁侧表面某点测得 x 和 y 向的线应变 $\varepsilon_x = 400\times10^{-6}$，$\varepsilon_y = -120\times10^{-6}$，材料的弹性模量 $E = 200$ GPa，泊松比 $\mu = 0.3$，试求该点 x、y 面的正应力 σ_x 和 σ_y（x 沿桥纵向）。

7－13 在平面应力状态下，试分别将第一强度理论和第三强度理论的破坏条件用 σ_x、σ_y 及 τ_x 表示，材料的抗拉强度为 σ_b，屈服极限为 σ_s。

7－14 铸铁薄壁管如图所示，管的外直径 $D = 200$ mm，壁厚 $\delta = 15$ mm，轴向压力 $F = 350$ kN，许用应力$[\sigma] = 30$ MPa，泊松比 $\mu = 0.25$，当内压 $p = 3$ MPa 和 5 MPa 时，试分别选择适用的强度理论校核该管的强度。



题 7－14 图

7－15 薄壁锅炉的平均直径为 1 250 mm，最大内压为 23 个大气压（1 大气压≈0.1 MPa），在高温下工作，屈服点 $\sigma_s = 182.5$ MPa。若安全因数为 1.8，试按第三、和第四强度理论设计锅炉的壁厚。

第八章　组合变形构件的强度

§8－1 概　述

到第六章为止，我们所研究过的构件，只限于有一种基本变形的情况，例如拉伸（或压缩）、剪切、扭转和弯曲。而在工程实际中的许多构件，往往存在两种或两种以上的基本变形。例如图 8－1a 中悬臂吊车的横梁 AB，当起吊重物时，不仅产生弯曲，由于拉杆 BC 的斜向力作用，它还会发生压缩（图 8－1b）。又如图 8－2a 所示的齿轮轴，若将啮合力 F 向齿轮中心平移，则可简化成如图 8－2b 所示的情况。载荷 F 使轴产生弯曲变形；矩为 M_C 和 M_D 的两个力偶则使轴产生扭转变形。这些构件都同时存在两种基本变形，前者是弯曲与压缩的组合；后者则是弯曲与扭转的组合。在外力作用下，构件若同时产生两种或两种以上基本变形的情况，就称为**组合变形**。

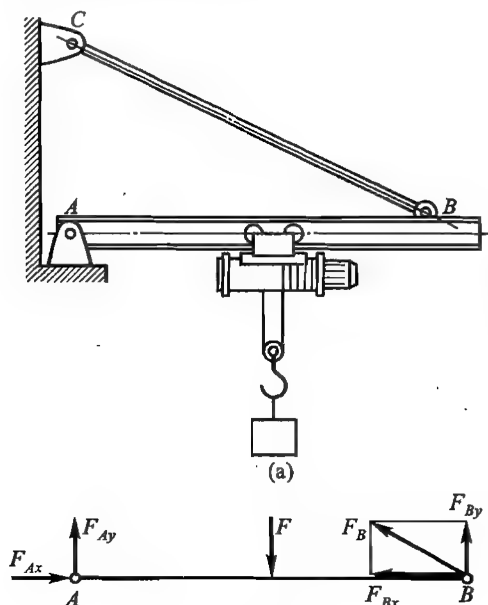


图 8－1

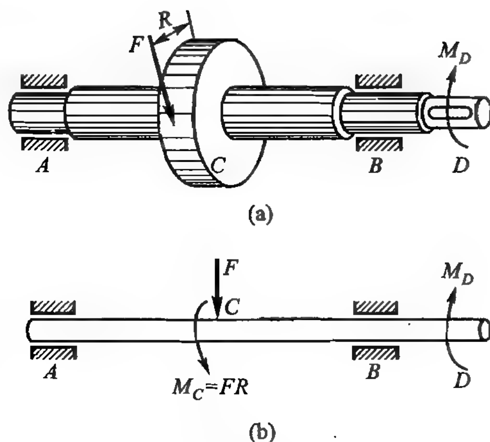


图 8－2

在线弹性变形范围内，由于我们所研究的又都是小变形构件，可以认为各载荷的作用彼此独立，互不影响，即任一载荷所引起的应力或变形不受其他载荷的影响。因此，对组合变形构件进行强度计算，可以应用叠加原理，采取先分解而后叠加的方法。其基本步骤是：① 将作用在构件上的载荷进行分解，得到与原载荷静力和变形等效的几组载荷，使构件在每组载荷作用下，只产生一种基本变形；② 分别计算构件在每种基本变形情况下的应力；③ 在危险点单元体上，将各基本变形引起的正应力、切应力分别叠加，计算其主应力；④ 根据构件的材料和危险点的应力状态，确定可能的破坏形式，选择相适应的强度理论进行强度计算。

本章将讨论弯曲与拉伸（或压缩）的组合以及弯曲与扭转的组合构件的强度问题。

§8－2 弯曲与拉伸（或压缩）的组合

在外力作用下，构件同时产生弯曲和拉伸（或压缩）变形的情况，称为弯曲与拉伸（或压缩）的组合变形。图 8－1 所示悬臂吊的横梁同时受到横向载荷和纵向载荷的作用，这是弯曲与拉伸（或压缩）组合变形构件的一种受力情况。在工程实际中，常常还遇到另一种情况，即载荷与杆件的轴线平行，但不通过横截面的形心，此时杆件的变形也是弯曲与拉伸（或压缩）的组合，这种情况通常称为偏心拉伸（或偏心压缩）。载荷的作用线至横截面形心的垂直距离称为偏心距。例如图 8－3a 中的开口链环和图 8－4a 中的厂房柱子，如果将其上的载荷 F 向杆件横截面的形心平移，则作用于杆件上的外力可视为两部分：一个轴向力 F 和一个矩为 $M=Fe$ 的力偶（图 8－3b、8－4b）。轴向力 F 将使杆件产生轴向拉伸（或压缩）；力偶 M 将使杆件产生弯曲。

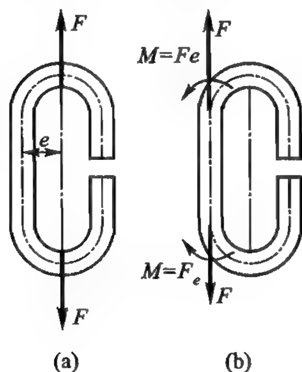


图 8－3

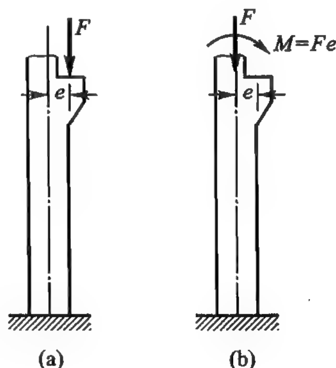


图 8－4

必须指出，对于变形体而言，力线平移定理（静力学 §4－2 节）的应用是有条件的。由于横截面的尺寸与杆件的长度相比甚小，根据圣维南原理（§1－3），将轴向力向横截面的形心平移简化，用静力等效力系代替，并不影响离该截面稍远处的应力和变形，即不仅静力等效，而且也满足变形等效的条件。

现在讨论弯曲与拉伸（或压缩）组合变形构件的应力和强度计算。

设一矩形截面杆，一端固定，一端自由（图 8－5a），作用于自由端的集中力 F 位于杆的纵对称面 Oxy 内，并与杆的轴线 x 成一夹角 φ。将外力 F 沿 x 轴和 y 轴方向分解，得到两个分力（图 8－5b）：

$$F_x = F\cos\varphi$$

$$F_y = F\sin\varphi$$

其中，分力 F_x 为轴向外力，在此力的单独作用下，杆将产生轴向拉伸，此时，任一横截面上的轴力 $F_N = F_x$。因此，杆横截面上各点将产生数值相等的拉应力，其值为

$$\sigma' = \frac{F_N}{A}$$

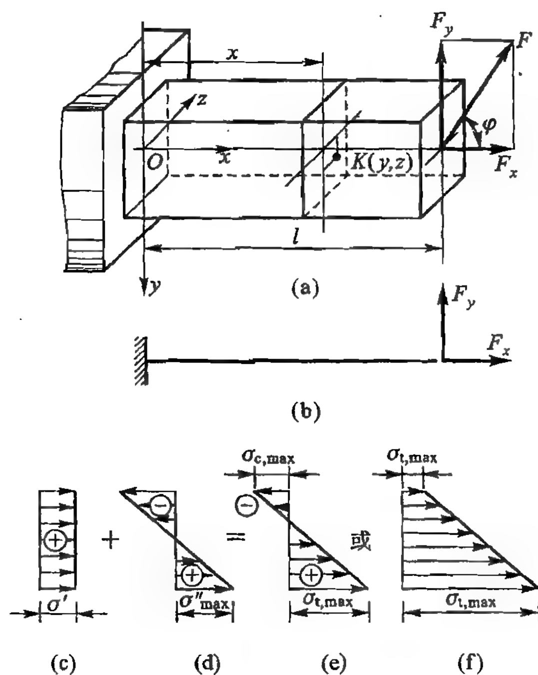


图 8－5

正应力 σ' 在横截面上均匀分布，如图 8－5c 所示。

分力 F_y 为垂直于杆轴线的横向外力，在此力的单独作用下，杆将在 Oxy 平面内发生平面弯曲，任一横截面的弯矩为

$$M = F_y(l - x)$$

此时在横截面上任一点 K 的弯曲应力为

$$\sigma'' = \frac{My}{I_z}$$

σ''沿截面高度方向的变化规律，如图 8 - 5d 所示。

由此可见，这是一个弯曲与拉伸组合变形的杆件。设在外力作用下杆件的变形很小，这时可应用叠加原理，将拉伸正应力 σ'与弯曲正应力 σ''按代数值叠加后，得到横截面上的总应力为

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' = \frac{F_N}{A} + \frac{My}{I_z} \tag{8-1}$$

设横截面上、下边缘处的最大弯曲应力大于（或小于）拉伸正应力，则总应力 σ 沿截面高度方向的变化规律如图 8 - 5e（或 8 - 5f）所示。

由于在固定端处横截面上的弯矩最大，因此，该截面为危险截面。从图 8 - 5e 可知，构件的危险点位于危险截面的上边缘或下边缘处。在下边缘处由于 σ' 和 σ''均为拉应力，故总应力为两者之和，由此得最大拉应力为

$$\sigma_{t,max} = \frac{F_N}{A} + \frac{M_{max}}{W_z} \tag{8-2}$$

在上边缘，由于 σ'为拉应力，而 σ''为压应力，故总应力为两者之差，由此得最大压应力为

$$\sigma_{c,max} = \frac{F_N}{A} - \frac{M_{max}}{W_z} \tag{8-3}$$

上两式中的 M_{max}为危险截面处的弯矩；W_z 为抗弯截面系数。

得到了危险点处的总应力后，即可根据材料的许用应力建立强度条件：

$$\sigma_{t,max} = \frac{F_N}{A} + \frac{M_{max}}{W_z} \leqslant [\sigma_t] \tag{8-4}$$

$$\sigma_{c,max} = \left| \frac{F_N}{A} - \frac{M_{max}}{W_z} \right| \leqslant [\sigma_c] \tag{8-5}$$

式中：$[\sigma_t]$和$[\sigma_c]$分别为材料拉伸和压缩时的许用应力。

一般情况下，对于抗拉与抗压能力不相等的材料，如铸铁和混凝土等，需用以上两式分别校核构件的强度；对于抗拉与抗压能力相等的材料，如低碳钢，则只需校核构件应力绝对值最大处的强度即可。

对于单向偏心拉伸的杆件（图 8 - 3），上述公式仍然成立，只需将式中的最大弯矩 M_{max}改为因载荷偏心而产生的弯矩 $M = Fe$ 即可。若外力 F 的轴向分力

F_x 为压力或单向偏心压缩时(图 8-4),上述公式中的第一项$\frac{F_N}{A}$则应取负号。

还应指出,在上面的分析中,对于受横向力作用的杆件,横截面上除有正应力外,还有因剪力而产生的切应力,由于其数值一般较小,可不考虑。

例 8-1 悬臂吊车如图 8-6a 所示,横梁用25a 工字钢制成,梁长 $l=4$ m,斜杆与横梁的夹角 $\alpha=30°$,电葫芦重 $F_1=4$ kN,起重量 $F_2=20$ kN,材料的许用应力$[\sigma]=100$ MPa。试校核横梁的强度。

解:

(1) 外力计算 取横梁 AB 为研究对象,其受力图如图 8-6b 所示。梁上载荷为 $F=F_1+F_2=24$ kN,右端斜杆的拉力 F_B 可分解为 F_{Bx}、F_{By}两个分力。横梁在横向力 F 和 F_{Ay}、F_{By}作用下产生弯曲;同时在 F_{Ax}和 F_{Bx}作用下产生轴向压缩。这是一个弯曲与压缩组合的构件。

当载荷移动到梁跨的中点时,可近似地认为梁处于危险状态。此时,由平衡方程

$$\sum M_A=0,\quad F_{By}\cdot l-F\cdot\frac{l}{2}=0$$

得

$$F_{By}=\frac{F}{2}=12\ \text{kN}$$

而

$$F_{Bx}=\frac{F_{By}}{\tan 30°}=\frac{12}{0.577}\ \text{kN}=20.8\ \text{kN}$$

又由平衡方程$\sum F_y=0$ 和$\sum F_x=0$,得:

$$F_{Ay}=12\ \text{kN}$$

$$F_{Ax}=20.8\ \text{kN}$$

(2) 内力和应力计算 根据横梁的受力情形,和上面求得的数值,可以绘出横梁的弯矩图如图 8-6c 所示。在梁跨的中点截面上的弯矩最大,其值为

$$M_{\max}=\frac{Fl}{4}=\frac{24\ 000\ \text{N}\times 4\ \text{m}}{4}=24\ 000\ \text{N}\cdot\text{m}$$

从型钢表上查得 25a 工字钢的截面面积和抗弯截面系数分别为:

$$A=48.5\ \text{cm}^2=48.5\times 10^{-4}\ \text{m}^2$$

$$W_z=402\ \text{cm}^3=402\times 10^{-6}\ \text{m}^3$$

所以最大弯曲应力为

$$\sigma_{B\max}=\frac{M_{\max}}{W_z}=\frac{24\ 000\ \text{N}\cdot\text{m}}{402\times 10^{-6}\ \text{m}^3}\approx 59.7\times 10^6\ \text{Pa}\approx 59.7\ \text{MPa}$$

此横截面上正应力的分布如图 8-6e 所示,梁危险截面的上边缘处受最大压应力、下边缘处受最大拉应力作用。

横梁各横截面所受的轴向压力均为

$$F_N=F_{Bx}$$

则各横截面上的压应力均为

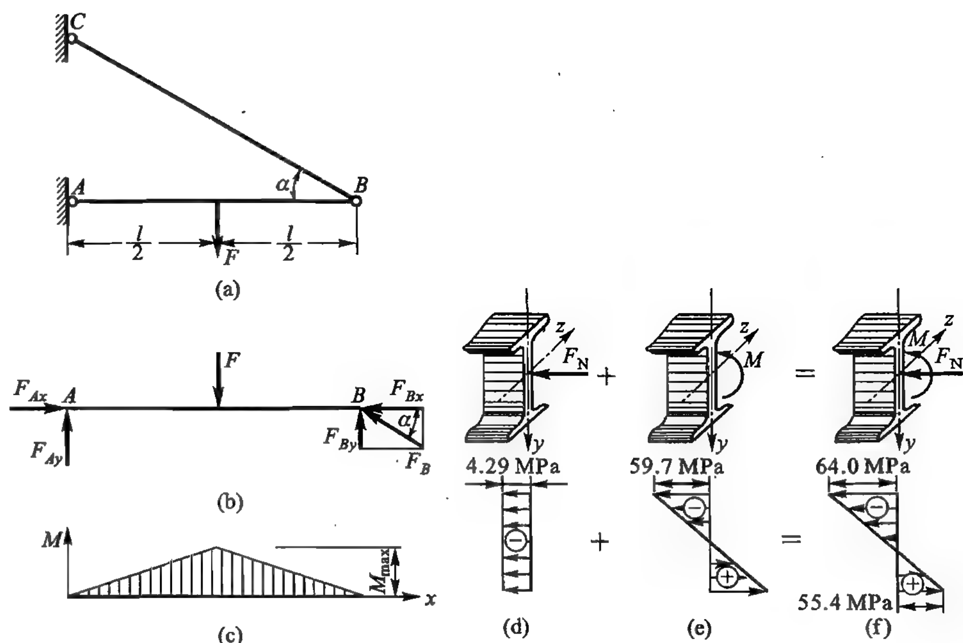


图 8－6

$$\sigma_c = -\frac{F_N}{A} = -\frac{F_{Bx}}{A} = \frac{-20\ 800\ \text{N}}{48.5\times10^{-4}\ \text{m}^2}$$

$$= -4.29\times10^6\ \text{Pa} = -4.29\ \text{MPa}$$

并均匀分布于横截面上，如图 8－6d 所示。

故梁跨中点横截面上、下边缘处的总正应力分别为（图 8－6f）：

$$\sigma_{c,max} = -\frac{F_N}{A} - \frac{M_{max}}{W_z} = -4.29\ \text{MPa} - 59.7\ \text{MPa} = -64\ \text{MPa}$$

$$\sigma_{t,max} = -\frac{F_N}{A} + \frac{M_{max}}{W_z} = -4.29\ \text{MPa} + 59.7\ \text{MPa} = +55.4\ \text{MPa}$$

（3）强度校核　由于工字钢的抗拉与抗压能力相同，故只校核正应力绝对值最大处的强度即可，即

$$|\sigma_{cmax}| = 64\ \text{MPa} < [\sigma]$$

由计算可知，此悬臂吊车的横梁是安全的。

例 8－2　图 8－7a 所示的钻床，钻孔时受到压力 $F = 15$ kN。已知偏心矩 $e = 400$ mm，铸铁立柱的许用拉应力 $[\sigma_t] = 35$ MPa，许用压应力 $[\sigma_c] = 120$ MPa，试计算铸铁立柱所需的直径。

解：

（1）计算内力　立柱在力 F 作用下产生偏心拉伸。将立柱假想地截开，取上段为研究对象（图 8－7b），由平衡方程，不难求得立柱的轴力和弯矩分别为：

$$F_N = F = 15\ 000\ \text{N}$$

$$M = Fe = 15\ 000\ \text{N} \times 0.4\ \text{m} = 6\ 000\ \text{N} \cdot \text{m}$$

(2) 选择立柱直径　由于铸铁的许用拉应力$[\sigma_t]$小于许用压应力$[\sigma_c]$，因此，应根据最大拉应力σ_{tmax}来进行强度计算。由公式(8－4)，

$$\sigma_{t,max} = \frac{F_N}{A} + \frac{Fe}{W_z} \leqslant [\sigma_t]$$

得

$$\frac{15\ 000\ \text{N}}{\frac{\pi d^2}{4}} + \frac{6\ 000\ \text{N} \cdot \text{m}}{\frac{\pi d^3}{32}} \leqslant 35 \times 10^6\ \text{N/m}^2$$

解此方程就能得到立柱的直径 d。但因这是一个三次方程，求解较繁。因此，在设计计算中常采用一种简便的方法。一般在偏心距较大的情况下，偏心拉伸（或压缩）杆件的弯曲正应力是主要的，所以可先按弯曲强度条件求出立柱的一个近似直径，然后将此直径的数值稍微增大，再代入偏心拉伸的强度条件[式(8－4)]中进行校核，如数值相差较大，再作调整，如此逐步逼近，最后可求得满足此方程的直径。

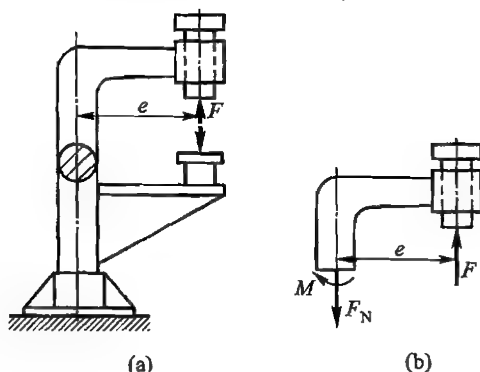


图 8－7

在此题中，先考虑弯曲强度条件

$$\frac{M}{W_z} \leqslant [\sigma]$$

即

$$\frac{6\ 000\ \text{N} \cdot \text{m}}{\frac{\pi d^3}{32}} \leqslant 35 \times 10^6\ \text{N/m}^2$$

由此解得立柱的近似直径

$$d = 120\ \text{mm}$$

将其稍加增大，现取 $d = 125\ \text{mm}$，再代入偏心拉伸的强度条件校核，得

$$\sigma_{t,max} = \frac{15\ 000\ \text{N}}{\frac{3.14 \times 0.125^2}{4}\ \text{m}^2} + \frac{6\ 000\ \text{N} \cdot \text{m}}{\frac{3.14 \times 0.125^3}{32}\ \text{m}^3}$$

$$= 32.5 \times 10^6 \text{ Pa} = 32.5 \text{ MPa} < [\sigma] = 35 \text{ MPa}$$

满足强度条件，最后选用立柱直径 $d = 125$ mm。

例 8－3 一带槽钢板受力如图 8－8a 所示，已知钢板宽度 $b = 80$ mm，厚度 $\delta = 10$ mm，边缘上半圆形槽的半径 $r = 10$ mm，已知拉力 $F = 80$ kN，钢板许用应力 $[\sigma] = 140$ MPa。试对此钢板进行强度校核。

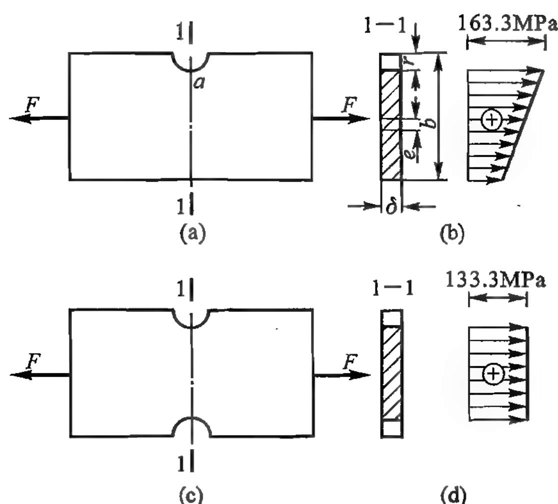


图 8－8

解：由于钢板在截面 1－1 处有一半圆槽，因而外力 F 对此截面为偏心拉伸，其偏心距之值为

$$e = \frac{b}{2} - \frac{b-r}{2} = \frac{r}{2} = \frac{10}{2} \text{ mm} = 5 \text{ mm}$$

截面 1－1 的轴力和弯矩分别为：

$$F_N = F = 80 \text{ kN} = 80\ 000 \text{ N}$$

$$M = Fe = 80\ 000 \text{ N} \times 0.005 \text{ m} = 400 \text{ N} \cdot \text{m}$$

轴力 F_N 和弯矩 M 在半圆槽底部的 a 点处都引起拉应力（图 8－8b），此处即为危险点。由式（8－4）得最大拉应力为

$$\sigma_{t,\max} = \frac{F}{\delta(b-r)} + \frac{Fe}{\dfrac{\delta(b-r)^2}{6}} = \frac{80\ 000 \text{ N}}{0.01 \text{ m} \times (0.08-0.01) \text{ m}}$$

$$+ \frac{6 \times 400 \text{ N} \cdot \text{m}}{0.01 \text{ m} \times (0.08-0.01)^2 \text{ m}^2}$$

$$= 163.3 \times 10^6 \text{ Pa} = 163.3 \text{ MPa} > [\sigma]$$

计算结果表明，钢板在截面 1－1 处的强度不够。

从上面的分析可知，造成钢板强度不够的原因，是由于偏心拉伸而引起的弯矩 Fe，使截面 1－1 的应力显著增加。为了保证钢板具有足够的强度，在允许的条件下，可在槽的对称位

置再开一槽(图 8-8c)。这样就避免了偏心拉伸,而使钢板变为轴向拉伸了。此时截面 1-1 上的应力(图 8-8d)为

$$\sigma = \frac{F}{\delta(b-2r)} = \frac{80\ 000\ \text{N}}{0.01\ \text{m}\times(0.08-2\times0.01)\ \text{m}}$$
$$=133.3\ \text{MPa} < [\sigma] = 140\ \text{MPa}$$

由此可知,虽然钢板被两个槽所削弱,使横截面面积减少了,但由于避免了载荷的偏心,因而使截面 1-1 的实际应力比有一个槽时大为降低,保证了钢板的强度。但须注意,开槽时应使截面变化缓和些,以减小应力集中。

§8-3 弯曲与扭转的组合

机械中一般有扭转变形的构件,例如齿轮轴等,在扭转的同时,往往还有弯曲变形。当弯曲的影响不能忽略时,就应按弯曲与扭转的组合变形问题来计算。本节将讨论圆杆在弯曲与扭转组合变形时的强度计算。下面以一个典型的弯曲与扭转组合的圆杆来说明。

设有一圆截面直杆 AB,一端固定,另一端自由;在自由端 B 处安装有一圆轮,并于轮缘处作用一集中力 F,如图 8-9a 所示,现在研究杆 AB 的强度。为此,将力 F 向 B 端面的形心平移,得到一横向力 F 和矩为 $M_B=FR$ 的力偶,此时杆 AB 的受力情况可简化为如图 8-9b 所示,横向力和力偶分别使杆 AB 发生平面弯曲和扭转。

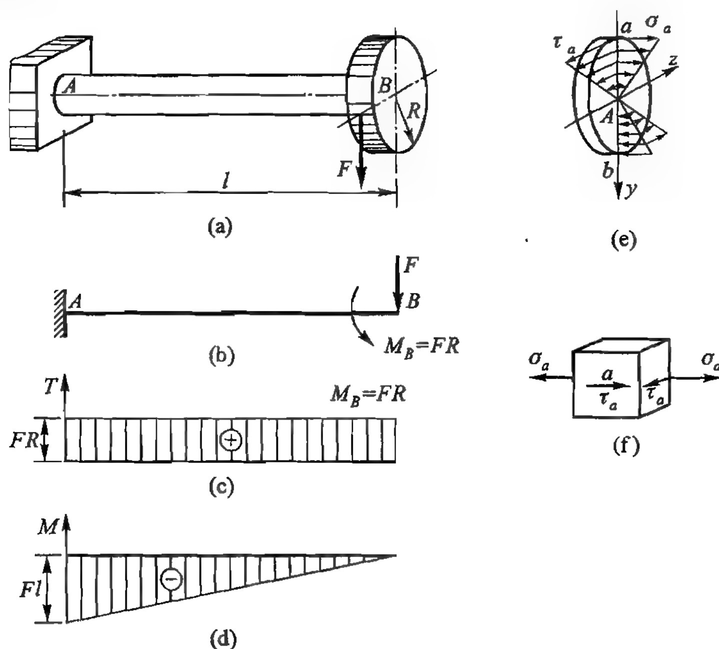


图 8-9

作出杆 AB 的扭矩图和弯矩图(图 8－9c、d),由图 8－9d 可见,AB 杆左端截面的弯矩最大,所以此处为危险截面。危险截面上弯曲正应力和扭转切应力的分布规律如图 8－9e 所示。由图可见,在 a 和 b 两点处,弯曲正应力和扭转切应力同时达到最大值,均为危险点,其上的最大弯曲正应力 σ_a 和最大扭转切应力 τ_a 分别为:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_a=\frac{M}{W_z}\\ \tau_a=\frac{T}{W_p}\end{aligned}\right\}\tag{a}$$

式中 M 和 T 分别为危险截面的弯矩和扭矩;W_z 和 W_p 分别为抗弯截面系数和抗扭截面系数。如在 a,b 两危险点中的任一点,例如 a 点处取出一单元体,如图 8－9f 所示。现求单元体的主应力,将 $\sigma_y=0$、$\sigma_x=\sigma_a$ 和 $\tau_x=\tau_a$ 代入公式(7－5),可得

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_3\end{matrix}\right\}=\frac{\sigma_a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_a}{2}\right)^2+\tau_a^2}\tag{8-6}$$

另一主应力

$$\sigma_2=0$$

求得主应力后,即可根据强度理论进行强度计算。

机械中的轴一般都用塑性材料制成,因此应采用第三或第四强度理论。如用第三强度理沦,其强度条件为

$$\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3\leqslant[\sigma]$$

将主应力代入上式,可得用正应力和切应力表示的强度条件为

$$\sigma_{r3}=\sqrt{\sigma_a^2+4\tau_a^2}\leqslant[\sigma]\tag{8-7}$$

若将式(a)代入上式,并注意到对于圆截面杆,$W_p=2W_z$,可得以弯矩、扭矩和抗弯截面系数表示的强度条件为

$$\sigma_{r3}=\frac{\sqrt{M^2+T^2}}{W_z}\leqslant[\sigma]\tag{8-8}$$

如用第四强度理论,则将各主应力代入式(7－25)的第四式

$$\sigma_{r4}=\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]}$$

可得按第四强度理论建立的强度条件为

$$\sigma_{r4}=\sqrt{\sigma_a^2+3\tau_a^2}\leqslant[\sigma]\tag{8-9}$$

若以式(a)代入,则得

$$\sigma_{r4}=\frac{\sqrt{M^2+0.75T^2}}{W_z}\leqslant[\sigma]\tag{8-10}$$

以上公式同样适用于空心圆截面杆，只需以空心圆截面杆的抗弯截面系数代替实心圆截面杆的抗弯截面系数即可。

式(8－7)～式(8－10)为弯曲与扭转组合变形圆截面杆的强度条件。对于拉伸(或压缩)与扭转组合变形的圆截面杆，其横截面上也同时作用有正应力和切应力，在危险点处取出的单元体，其应力状态同弯曲与扭转组合时的情况相同，因此也可得出式(8－7)和式(8－9)的强度条件，但其中的弯曲应力 σ_a 应改为拉伸(或压缩)应力，而式(8－8)和式(8－10)不再适用。

例 8－4 图 8－10a 所示的手摇绞车，已知轴的直径 $d=30$ mm，卷筒直径 $D=360$ mm，两轴承间的距离 $l=800$ mm，轴的许用应力$[\sigma]=80$ MPa。试按第三强度理论计算绞车能起吊的最大安全载荷 F。

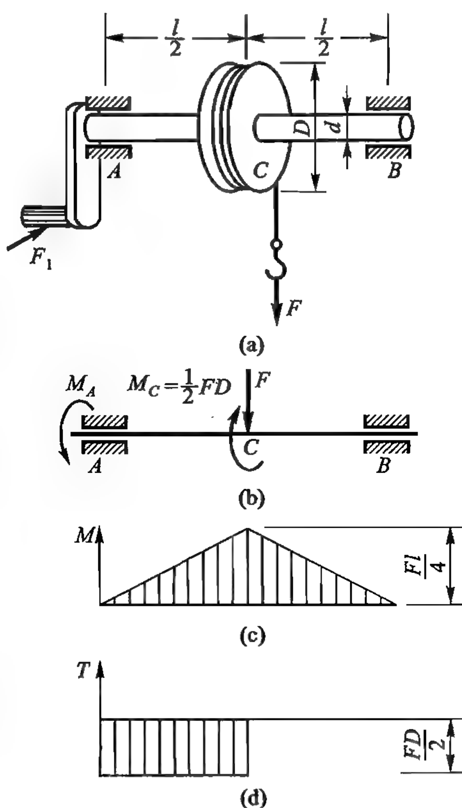


图 8－10

解：

(1) 外力分析　将载荷 F 向轮心平移，得到作用于轮心的横向力 F 和一个附加的力偶，其矩为 $M_C=\frac{1}{2}FD$，它们代替了原来载荷的作用，且分别与轴承的反力和转动绞车的力矩 M_A 相平衡。由此得到轴的计算简图如图 8－10b 所示。

(2) 作内力图　绞车轴的弯矩图和扭矩图如图 8－10c、d 所示，由图可见，危险截面在轴的中点 C 处，此截面的弯矩和扭矩分别为

$$M=\frac{1}{4}Fl=\frac{1}{4}F\times0.8\ \text{m}=0.2F\ \text{N}\cdot\text{m}$$

$$T=\frac{1}{2}FD=\frac{1}{2}F\times0.36\ \text{m}=0.18F\ \text{N}\cdot\text{m}$$

(3) 求许用载荷　因轴是塑性材料制成的，可采用第三强度理论，即由公式(8－8)得

$$\sigma_{r3}=\frac{\sqrt{M^2+T^2}}{W_z}\leqslant[\sigma]$$

即

$$\frac{\left(\sqrt{(0.2F)^2+(0.18F)^2}\right)\ \text{N}\cdot\text{m}}{\frac{\pi\times0.03^3}{32}\ \text{m}^3}\leqslant80\times10^6\ \text{N/m}^2$$

由此解得

$$F\leqslant788\ \text{N}$$

即许用载荷不超过 788 N。

例 8－5　一齿轮轴 AB 如图 8－11a 所示。已知轴的转速 $n=265$ r/min，由电动机输入的

功率 $P=10\ \mathrm{kW}$；两齿轮节圆直径为 $D_1=396\ \mathrm{mm}$，$D_2=168\ \mathrm{mm}$；齿轮啮合力与齿轮节圆切线的夹角 $\alpha=20°$；轴直径 $d=50\ \mathrm{mm}$，材料为45钢，其许用应力 $[\sigma]=50\ \mathrm{MPa}$。试校核轴的强度。

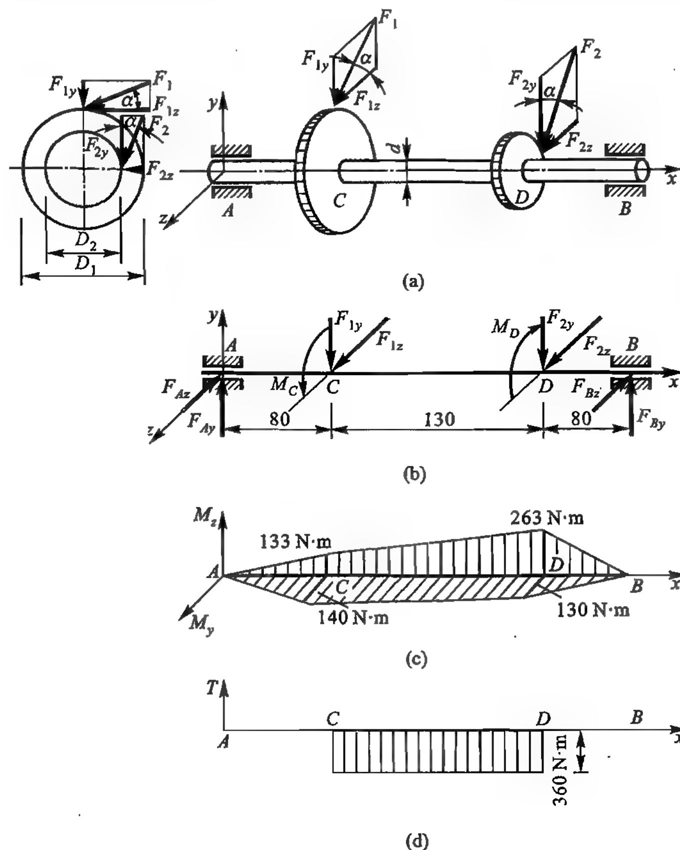


图 8－11

解：此轴的受力情况比较复杂，各啮合力和轴承反力都需要简化到两个互相垂直的平面上来处理。

(1) 计算外力　取一空间坐标系 $Oxyz$，将啮合力 F_1、F_2 分解为切向力和径向力：F_{1z}、F_{1y} 和 F_{2y}、F_{2z}，它们分别平行于 y 轴和 z 轴。再将两个切向力分别向齿轮中心平移，亦即将 F_{1z}、F_{2y} 平行移至轴上，同时加一附加力偶，其矩分别为：

$$M_C=F_{1z}\times\frac{D_1}{2},\quad M_D=F_{2y}\times\frac{D_2}{2}$$

简化结果，轴的计算简图如图 8－9b 所示。由图可见，M_C 和 M_D 使轴产生扭转，F_{1y}、F_{2y} 和 F_{1z}、F_{2z} 则分别使轴在平面 Oxy 和 Oxz 内发生弯曲。

下面进一步计算有关数据。由式(3－1)

$$M_C=M_D=9\ 550\frac{\{P\}_{\mathrm{kW}}}{\{n\}_{\mathrm{r/min}}}=\left(9\ 550\times\frac{10}{265}\right)\ \mathrm{N\cdot m}=360\ \mathrm{N\cdot m}$$

$$M_C = F_{1z} \cdot \frac{D_1}{2}$$

则

$$F_{1z} = \frac{2M_C}{D_1} = \frac{2 \times 360\ \text{N} \cdot \text{m}}{0.396\ \text{m}} = 1\ 818\ \text{N}$$

因

$$M_D = F_{2y} \cdot \frac{D_2}{2}$$

所以

$$F_{2y} = \frac{2M_D}{D_2} = \frac{2 \times 360\ \text{N} \cdot \text{m}}{0.168\ \text{m}} = 4\ 286\ \text{N}$$

又由图 8-11a 所示切向力和径向力的三角关系，有

$$F_{1y} = F_{1z} \tan 20° = 1\ 818\ \text{N} \times 0.364 = 662\ \text{N}$$

$$F_{2z} = F_{2y} \tan 20° = 4\ 286\ \text{N} \times 0.364 = 1\ 560\ \text{N}$$

（2）作内力图、并确定危险截面　根据上面的简化结果，需分别画出轴在两互相垂直平面内的弯矩图和扭矩图，为此，须先计算轴的支座反力。

在 Oxz 平面内，由平衡方程可求得轴承 A、B 处的支座反力为：

$$F_{Az} = 1\ 747\ \text{N}, \quad F_{Bz} = 1\ 631\ \text{N}$$

然后可画出平面 Oxz 内的弯矩 M_y 图，如图 8-11c 中的水平图形。

同样，可求得在平面 Oxy 内轴承 A、B 处的支座反力为：

$$F_{Ay} = 1\ 662\ \text{N}, \quad F_{By} = 3\ 286\ \text{N}$$

在平面 Oxy 内的弯矩 M_z 图如图 8-11c 中的铅垂图形。

根据图 8-11b 所示的外力偶，画出轴的扭矩图如图 8-11d 所示。

由弯矩图和扭矩图上可见，在 CD 段内各截面的扭矩相同，而最大弯矩则可能出现在截面 C 或 D 上。截面 C、D 上的弯矩为该截面上两个方向弯矩的合成。对于圆截面轴而言，无论合成弯矩所在平面的方向如何，并不影响使用弯曲正应力公式来计算弯曲应力，因为合成弯矩的所在平面仍然是圆轴的纵向对称面。与力的合成原理相同，合成弯矩 M 的数值等于两互相垂直平面内的弯矩平方和的开方，即

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$$

矢量 $\boldsymbol{M}$ 作用线即为中性轴。

代进数值后，求得截面 C 和 D 的合成弯矩分别为

$$M_C = (\sqrt{140^2 + 133^2})\ \text{N} \cdot \text{m} = 193\ \text{N} \cdot \text{m}$$

$$M_D = (\sqrt{130^2 + 263^2})\ \text{N} \cdot \text{m} = 293\ \text{N} \cdot \text{m}$$

由比较可知，在截面 D 上的合成弯矩最大（可以证明 CD 段其他截面的合成弯矩均小于 M_D）。又从扭矩图知，此处同时存在的扭矩为

$$T = 360\ \text{N} \cdot \text{m}$$

（3）强度校核　对于塑性材料制成的轴，应采用第三或第四强度理论进行计算，用第三理论，则由式（8-8），

$$\sigma_{r3}=\frac{\sqrt{M_D^2+T^2}}{W_z}=\frac{(\sqrt{293^2+360^2})\ \text{N}\cdot\text{m}}{0.1\times0.05^3\ \text{m}^3}=37.1\times10^6\ \text{Pa}=37.1\ \text{MPa}$$

$$<[\sigma]=50\ \text{MPa}$$

如采用第四强度理论，则由式(8－10)，

$$\sigma_{r4}=\frac{\sqrt{M_D^2+0.75T^2}}{W_z}=\frac{(\sqrt{293^2+0.75\times360^2})\ \text{N}\cdot\text{m}}{0.1\times0.05^3\ \text{m}^3}=34.2\times10^6\ \text{Pa}$$

$$=34.2\ \text{MPa}<[\sigma]=50\ \text{MPa}$$

计算可知，不论是根据第三强度理论，还是第四强度理论，轴的强度都是足够的。与上述相当应力对应的危险点即为 D 截面上离中性轴（矢量 M_D 作用线）最远的周边点 a 和 b（图 8－12）。

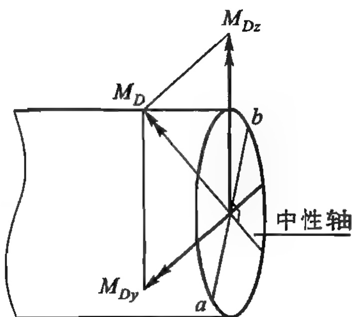


图 8－12

必须指出，上述轴的计算是按静载荷情况来考虑的。这样处理在轴的初步设计或估算时是经常采用的。实际上，由于轴的转动，轴是在周期变化的交变应力作用下工作的，因此，有时还须进一步校核在交变应力作用下的强度。这在机械零件课程中将另有详述，本书不再讨论。至于有关交变应力的一些概念，将在第十章中介绍。

此外，在工程设计中，对于一些组合变形构件的强度问题，也常采用一种简化的计算方法。这就是当某一种基本变形起主导作用时，可将次要的基本变形忽略不计，而将构件简化为某种单一的基本变形；同时适当地增大安全因数或降低许用应力。例如，轧钢机中主动轧辊的辊身是弯曲与扭转组合变形的问题，但在实际计算中，可加大安全因数而只按弯曲强度来考虑。又如拧紧螺栓时，是拉伸与扭转的组合变形问题，有时则降低许用应力而只按拉伸强度来计算。如果构件所产生的几种基本变形都比较重要而不能忽略时，这就应作为组合变形构件的问题来处理了。

 小 结

1. 杆件由几种基本变形组成的变形称为组合变形。可根据载荷分解为哪几种基本变形的载荷，或引起哪几种基本变形的内力来判断组合变形的类型。

2. 在线弹性和小变形条件下，解决组合变形问题的基本方法是"先分解后叠加"。正确将组合变形分解为几种基本变形，以及将各基本变形计算的结果正确叠加是本章的重点。

3. 对组合变形进行分解时，依据静力等效和变形等效的原理，首先对不通过横截面形心的横向力或纵向力向横截面形心平移，得到平移后的力和相应的绕轴线或绕中性轴的力偶；对作用于纵向对称平面过横截面形心的斜向力要分

解为横向力和轴向力。然后按各基本变形所受载荷的特点，即可将组合变形分解为几种基本变形。

4. 组合变形杆件内任一点单元体各面上的应力为相应各基本变形引起的正、切应力分别叠加的结果。

5. 组合变形强度计算的关键是确定危险截面和危险点。根据内力图和横截面尺寸的变化情况确定危险截面，一般发生在内力分布峰值处或较小截面尺寸处；根据各基本变形引起的应力沿危险截面的分布规律确定危险点，一般常位于危险截面的周边。因此熟练掌握各基本变形内力和应力的分析与计算，即成为解决这一关键的基础。

6. 分析组合变形强度问题的步骤是：(1) 将作用于杆件的载荷分解为几种基本变形的载荷；(2) 计算各基本变形载荷引起的内力，确定危险截面；(3) 计算危险截面上的应力，并叠加之，确定危险点。(4) 计算危险点的相当应力。对弯拉（或压）组合变形的杆件，因危险点处于单向应力状态，可将两种基本变形引起的正应力按代数值叠加，求出总应力，即为相当应力（四种强度理论相同）；对弯扭组合变形等，因危险点处于复杂应力状态，须按所选不同强度理论计算相当应力；(5) 进行强度计算。单向应力状态的强度条件为 $\sigma_{max} \leq [\sigma]$，复杂应力状态的强度条件为 $\sigma_r \leq [\sigma]$。

7. 通过本章学习，应用"先分解后叠加"的方法，同样可分析本章未提到的双向弯曲、双向偏心拉压、拉（压）扭或拉（压）弯扭等组合变形问题。

思考题

8-1 如何判断构件的变形类型？试分析图 8-13 所示杆件各段杆的变形类型。

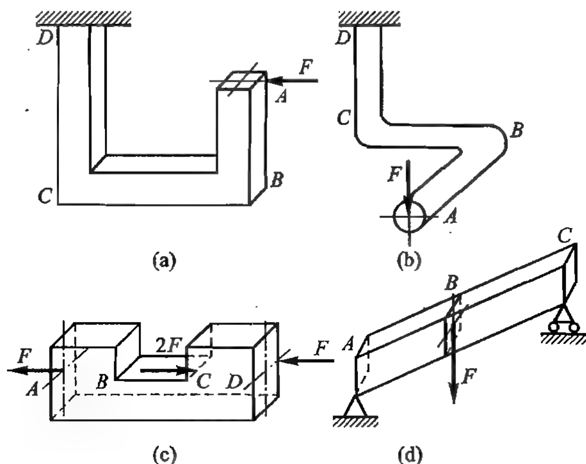


图 8-13

8-2 用叠加法计算组合变形杆件的内力和应力时，其限制的条件是什么？为什么必须满足这些条件？

8-3 矩形截面杆某截面上的内力如图 8-14 所示，试画出该截面可能出现的几种应力分布情况，并写出与这些情况相应的 M、F_N 和 h 值之间应满足的关系式。

8-4 图 8-15 所示烟囱的基础座为方形截面，试分析为使混凝土基础截面不产生拉应力，烟囱所受总风力 F_1 与总重力 F_2 的合力作用线 F 通过基础截面时的限制范围。

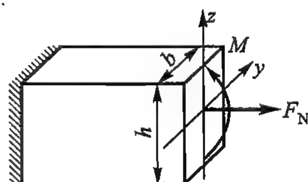


图 8-14

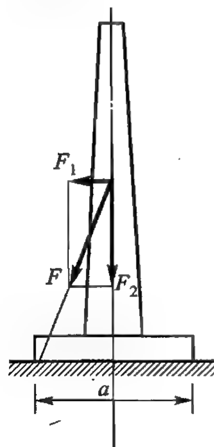


图 8-15

8-5 一圆截面杆的两个横截面所受弯矩分别如图 8-16a、b 所示，试确定各自的中性轴方位及弯曲正应力最大点的位置。

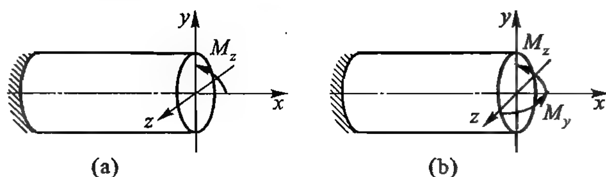


图 8-16

8-6 试判断图 8-17 所示各杆危险截面及危险点的位置，并画出危险点的应力状态。

8-7 拉伸与扭转组合变形同弯曲与扭转组合变形的内力、应力和强度条件有什么不同（圆截面杆）？

8-8 一圆截面悬臂梁如图 8-18 所示，同时受到轴向力、横向力和扭转力偶作用。

（1）试指出危险截面和危险点的位置；

（2）画出危险点的应力状态；

（3）下面两个强度条件中哪一个正确？

$$\frac{F_N}{A}+\sqrt{\left(\frac{M}{W_z}\right)^2+4\left(\frac{T}{W_p}\right)^2}\leqslant[\sigma]$$

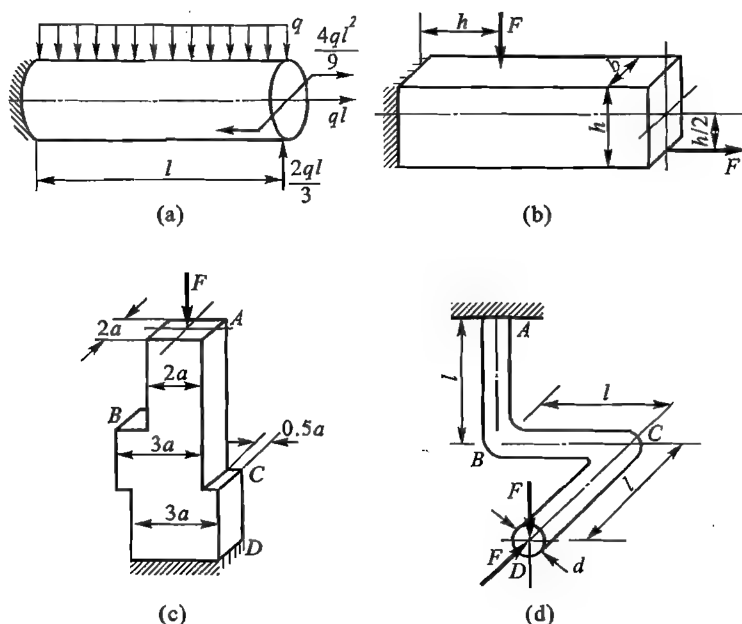


图 8－17

$$\sqrt{\left(\frac{F_N}{A}+\frac{M}{W}\right)^2+4\left(\frac{T}{W_p}\right)^2}\leqslant[\sigma]$$

8－9 图 8－19 所示悬臂梁自由端受一与 z 轴成 φ 角的横向力 F 作用，该力可分解为垂直分力 $F_z=F\cos\varphi$ 和水平分力 $F_y=F\sin\varphi$。根据叠加法写出任一截面上任一点 K 的正应力计算式，并确定该梁危险点的位置及其正应力的计算式和列出中性轴（零正应力线）的方程。

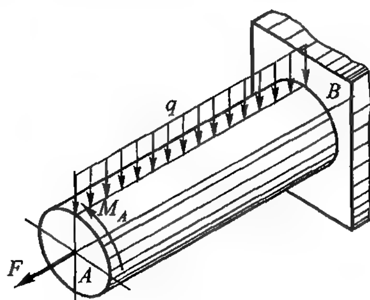


图 8－18

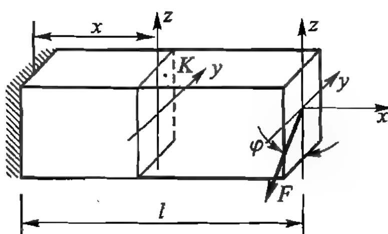


图 8－19

8－10 当例 8－1 悬臂吊工字钢梁 AB 所受载荷 F 移动至 x 位置时（图 8－20），试写出危险点的压应力计算式，并导出为使危险点压应力最大 x 的位置，以及 x 与 $l/2$ 的差值计算式。已知载荷 F 及梁的抗弯截面系数 W_z 和横截面面积 A。

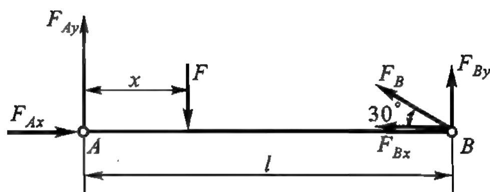
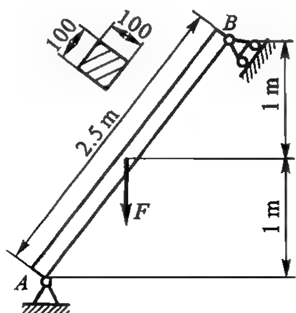


图 8－20

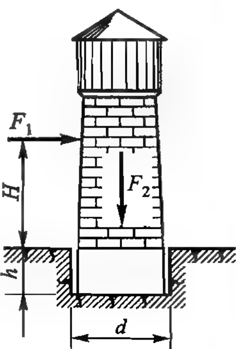
习　题

8－1　斜杆 AB 的横截面为 $100\times100\ \text{mm}^2$ 的正方形，若 $F=3$ kN，试求该杆横截面上的最大拉应力和最大压应力。

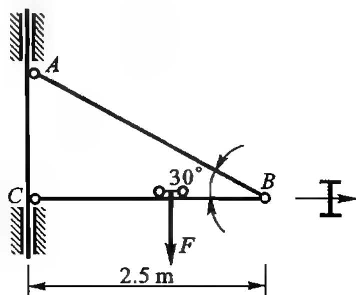
8－2　水塔受水平风力的作用，风压的合力 $F_1=60$ kN，作用在离地面高 $H=15$ m 的位置，基础入土深度 $h=3$ m，设土的许用压应力 $[\sigma_c]=0.3$ MPa，基础的直径 $d=5$ m，为使基础不受拉应力，最大压应力又不超过 $[\sigma_c]$，求水塔连同基础总重 F_2 允许的范围。



题 8－1 图



题 8－2 图



题 8－3 图

8－3　悬臂吊如图所示，起重量（包括电葫芦）$F=30$ kN，横梁 BC 为工字钢，许用应力 $[\sigma]=140$ MPa，试选择工字钢的型号（可近似按 F 行至梁跨中点位置计算）。

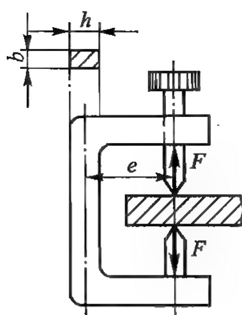
8－4　一夹具如图所示，已知 $F=2$ kN，偏心距 $e=60$ mm，竖杆的矩形截面尺寸 $b=10$ mm，$h=22$ mm。材料是 Q235 钢，$\sigma_s=240$ MPa，规定安全因数 $[n]=1.5$。试校核竖杆的强度。

8－5　若在正方形截面短柱的中间处开一个槽（图 b），使横截面面积减小为原截面面积图 a 的一半，问最大压应力将比不开槽时增大几倍？

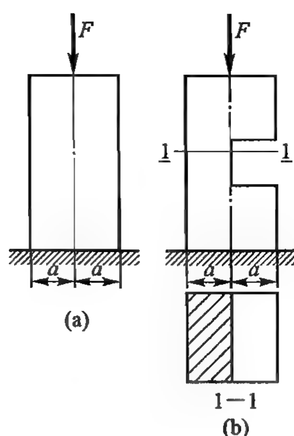
8－6　图示一矩形截面杆，用应变片测得杆件上、下表面的纵向应变分别为 $\varepsilon_a=1\times10^{-3}$，$\varepsilon_b=0.4\times10^{-3}$，材料的弹性模量 $E=210$ GPa。

（1）试绘制横截面的正应力分布图；

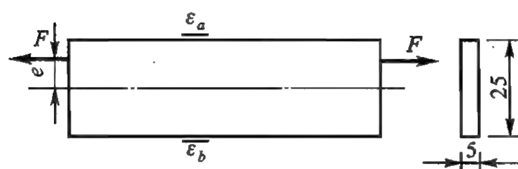
（2）求拉力 F 及其偏心距 e 的数值。



题 8-4 图



题 8-5 图



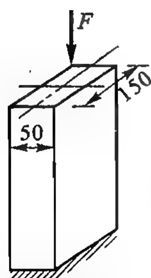
题 8-6 图

8-7 一矩形截面短柱，受图示偏心压力 F 作用，已知许用拉应力 $[\sigma_t]=30$ MPa，许用压应力 $[\sigma_c]=90$ MPa，求许用压力 $[F]$。

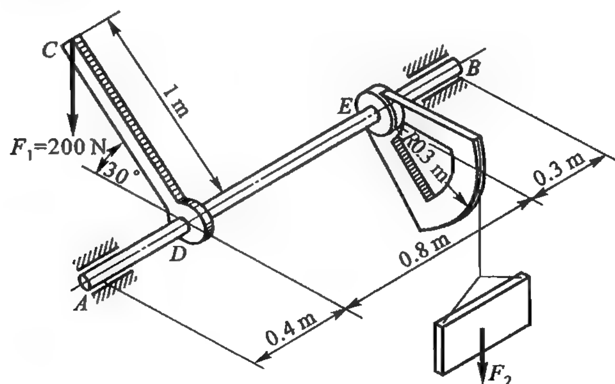
8-8 加热炉炉门的升降装置如图所示。轴 AB 的直径 $d=40$ mm，CD 为 40×20 mm² 的矩形截面杆，材料都是 Q235 钢，$\sigma_s=240$ MPa，已知力 $F_1=200$ N。

（1）试求杆 CD 横截面上的最大正应力；

（2）求轴 AB 的工作安全因数。



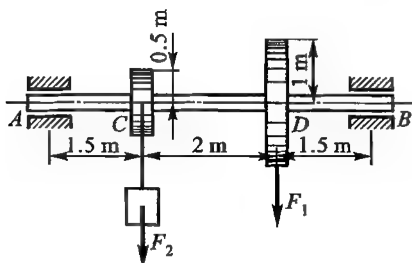
题 8-7 图



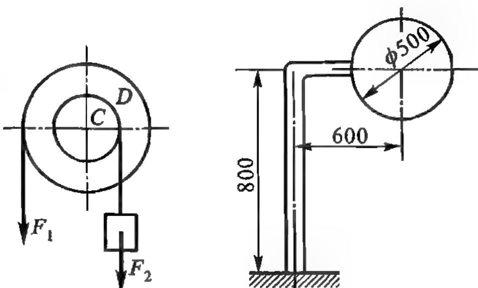
题 8-8 图

8-9 一轴上装有两个圆轮如图所示，F_1、F_2 两力分别作用于两轮上并处于平衡状态。圆轴直径 $d=110$ mm，$[\sigma]=60$ MPa。试按第四强度理论确定许用载荷。

8-10 铁道路标的圆信号板，装在外径 $D=60$ mm 的空心圆柱上。若信号板上作用的最大风载的压强 $p=2$ kPa，已知 $[\sigma]=60$ MPa，试按第三强度理论选定空心圆柱的壁厚 δ。



题 8-9 图

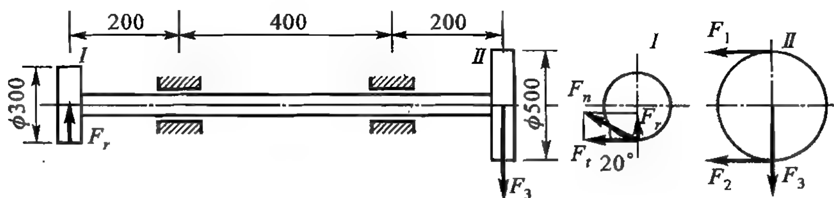


题 8-10 图

8-11 一传动轴其尺寸如图所示，传递的功率 $P=7$ kW，转速 $n=200$ r/min，齿轮 *I* 上的啮合力 F_n 与齿轮节圆切线成 $\alpha=20°$ 的夹角，胶带轮 *II* 上的两胶带平行，拉力为 F_1 和 F_2，且 $F_1=2F_2$。若 $[\sigma]=80$ MPa，试在下列两种情形下，按第三强度理论选择轴的直径。

(1) 带轮质量忽略不计；

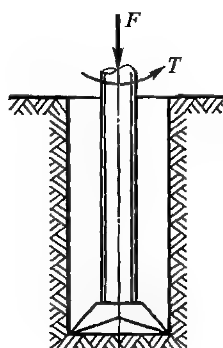
(2) 考虑带轮质量，设其重 $F_3=1.8$ kN。



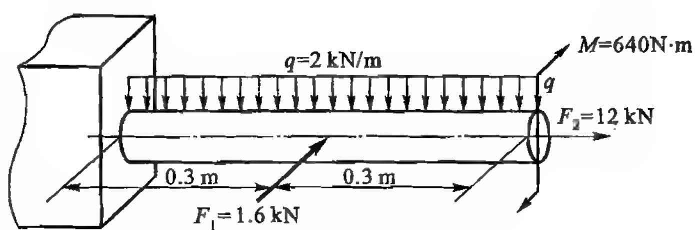
题 8-11 图

8-12 已知一牙轮钻机的钻杆为无缝钢管，外直径 $D=152$ mm，内直径 $d=120$ mm，许用应力 $[\sigma]=100$ MPa。钻杆的最大推进压力 $F=180$ kN，扭矩 $T=17.3$ kN · m，试按第三强度理论校核钻杆的强度。

8-13 一直径 $d=40$ mm 的钢直杆受载荷如图所示，材料的许用应力 $[\sigma]=160$ MPa，试按第四强度理论校核其强度。



题 8－12 图



题 8－13 图

第九章 压杆的稳定

§9-1 压杆稳定的概念

在第一章中对受压杆件的研究，是从强度的观点出发的。即认为只要满足压缩强度条件，就可以保证压杆的正常工作。这样考虑，对于短粗的压杆来说是正确的，但对于细长的压杆，就不适用了。例如，一根宽30 mm、厚5 mm的矩形截面松木杆，对其施加轴向压力，如图9-1所示。设材料的抗压强度$\sigma_c=40$ MPa，由试验可知，当杆很短时（设高为30 mm）如图9-1a所示，将杆压坏所需的压力为

$$
\begin{aligned}
F &= \sigma_c A \\
&= 40\times10^6\ \text{N/m}^2\times0.005\ \text{m}\times0.03\ \text{m} \\
&= 6\ 000\ \text{N}
\end{aligned}
$$

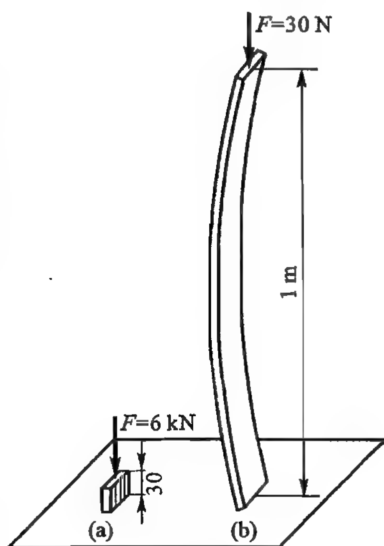


图9-1

但如杆长为1 m，则不到30 N的压力，杆就会突然产生显著的弯曲变形而失去工作能力（图9-1b）。这说明，细长压杆之所以丧失工作能力，是由于其轴线不能维持原有直线形状的平衡状态所致，这种现象称为丧失稳定，或简称失稳。由此可见，横截面和材料相同的压杆，由于杆的长度不同，其抵抗外力的性质将发生根本的改变：短粗的压杆是强度问题；而细长的压杆则是稳定问题。上例还表明，由于细长压杆的承载能力远低于短粗压杆，因此，研究压杆的稳定性就更为需要。

现对压杆的稳定性概念再作进一步的解释。取一根下端固定、上端自由的细长理想直杆，在上端严格沿轴线施加压力F（图9-2a），则无论压力多大，在直线形状下总是满足静力平衡条件的。然而该平衡状态视其压力的大小，却有稳定与不稳定之分，这可以通过对其施加一横向干扰产生微弯（图9-2b），然后

撤除来加以判断。试验发现，当压力 F 不超过某一临界值 F_{cr} 时，撤除干扰仍能恢复原状(图 9-2c)，表明原有的直线平衡状态是稳定的；但若压力超过临界值 F_{cr}，撤除干扰后，将只能在一定弯曲变形程度下平衡(图 9-2d)，甚至弯折而不恢复原状，表明原有的直线平衡状态是不稳定的。

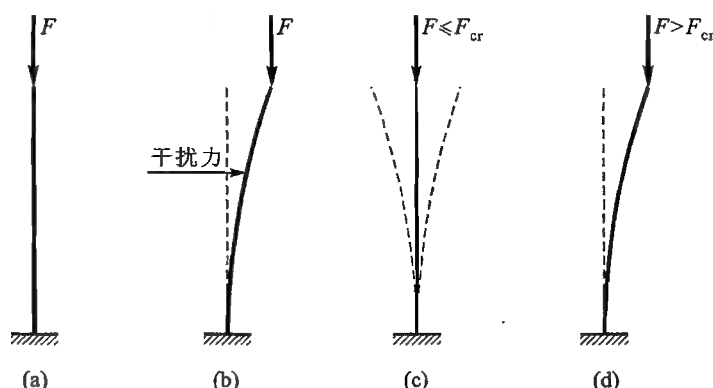


图 9-2

为什么因压力大小不同，压杆直线形状的平衡状态会有稳定与不稳定之分呢？这是由于当撤除干扰压杆仍处于微弯的瞬间(图 9-3a)，压力 F 对任一横截面作用有使压杆弯曲的外力矩 $F(\delta - w)$，而因弹性弯曲变形，各横截面上产生弯矩 $M = \dfrac{EI}{\rho(x)}$ ($\rho(x)$ 为轴线弯曲后的曲率半径)(图 9-3b)，它力图使压杆恢复原来的直线形状。若压力 F 不超过临界值 F_{cr}，则弯曲力矩小于恢复力矩 $\left(F(\delta - w) < \dfrac{EI}{\rho(x)}\right)$，为维持压杆的平衡，各截面的弯矩自动减小，曲率半径 $\rho(x)$ 增大，直到恢复直线形状的平衡状态；反之，若 $F > F_{cr}$，则弯曲外力矩大于或等于弹性恢复内力矩 $\left(F(\delta - w) \geqslant \dfrac{EI}{\rho(x)}\right)$，压杆只能在一定弯曲变形程度下平衡，甚至弯折。

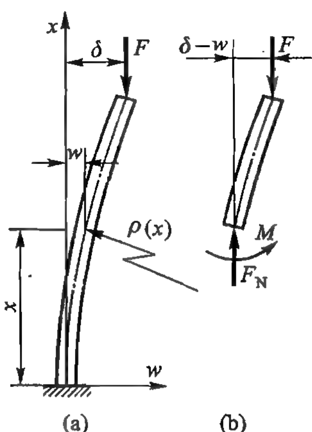


图 9-3

由此不难看出，细长压杆的直线平衡状态是否稳定，与压力 F 的大小有关。当压力 F 逐渐增大经 F_{cr} 时，压杆将从稳定平衡过渡到不稳定平衡。也就是说，轴向压力的量变，将引起压杆原来直线平衡状态的质变。因此，压力 F_{cr} 称为压杆的**临界力**，或称**临界载荷**。当外力达到此值时，压杆即开始丧失稳定。

在工程实际中，有许多受压的构件是需要考虑其稳定性的。例如，千斤顶的丝杠（图9－4），托架中的压杆（图9－5），轧钢厂无缝钢管穿孔机的顶杆（图9－6），以及采矿工程中的钻杆等。如果这些构件过于细长，在轴向压力较大时，就有可能丧失稳定而破坏。而这种破坏是突然发生的，往往会给工程结构或机械带来极大的损害，历史上存在不少由于失稳而造成严重事故的事例。因此在设计这类构件时，进行稳定计算是非常必要的。

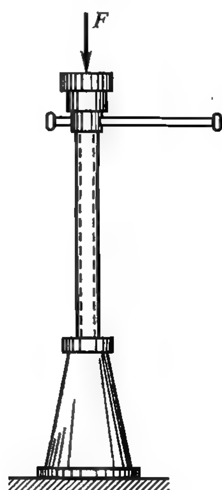


图9－4

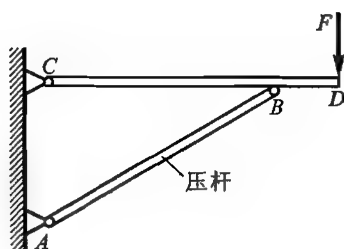


图9－5

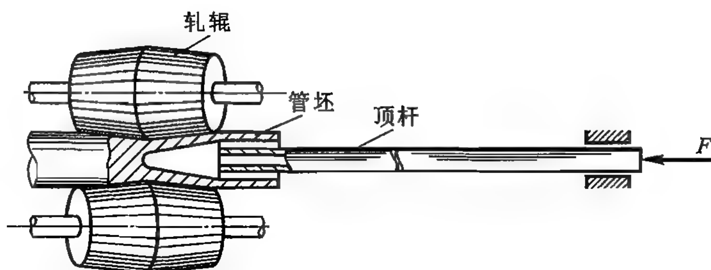


图9－6

失稳的现象不仅限于压杆这一类构件，其他如截面窄而高的梁，受外压的薄壁容器等，当外力超过临界值时，都可能有失稳的现象发生，其失稳后的形状如图9－7和图9－8中虚线所示。本章只讨论压杆的稳定问题。

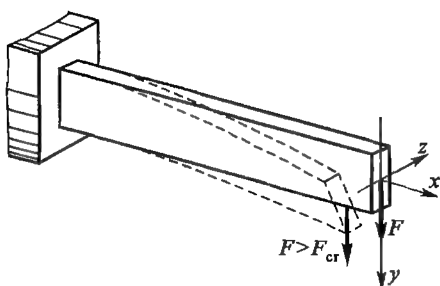


图 9 - 7

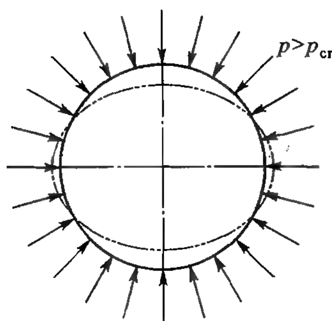


图 9 - 8

§9 - 2 细长压杆的临界力

如前所述，对确定的压杆来说，判断其是否会丧失稳定，主要取决于压力是否达到了临界力值。因此，根据压杆的不同条件来确定相应的临界力，是解决压杆稳定问题的关键。本节先讨论细长压杆的临界力。

由于临界力也可认为是压杆处于微弯平衡状态，当挠度趋向于零时承受的压力。因此，对一般截面形状、载荷及支座情况不复杂的细长压杆，可根据压杆处于微弯平衡状态下的挠曲线近似微分方程式(6 - 3)进行求解，这一方法称为静力法（或欧拉法）。此外还有能量法等。

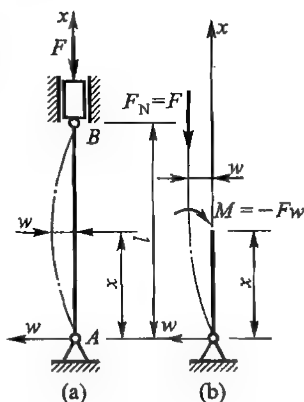


图 9 - 9

1. 两端铰支压杆的临界力

设一细长压杆 AB（图 9 - 9a），两端铰支，在轴向压力 F 作用下处于微弯平衡状态。则距杆下端 x 处截面的挠度为 w，该截面的弯矩（图 9 - 9b）为

$$M(x) = -Fw \tag{a}$$

因为力 F 可以不考虑正负号，在所选定的坐标内当 w 为正值时，$M(x)$ 为负值，所以上式右端加一负号。可以列出其挠曲线近似微分方程为

$$EI\frac{d^2w}{dx^2} = -Fw \tag{b}$$

若令

$$k^2 = \frac{F}{EI} \tag{c}$$

则式(b)可写成

$$\frac{d^2w}{dx^2} + k^2w = 0 \tag{d}$$

此方程的通解是

$$w = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx \tag{e}$$

式中 C_1 和 C_2 是两个待定的积分常数；系数 k 可从式(c)计算，但由于力 F 的数值仍为未知，所以 k 也是一个待定值。

根据杆端的约束情况，可有两个边界条件：

$$在\ x = 0\ 处, w = 0$$

$$在\ x = l\ 处, w = 0$$

将第一个边界条件代入式(e)，得

$$C_2 = 0$$

则式(e)可改写成

$$w = C_1 \sin kx \tag{f}$$

上式表示挠曲线是一正弦曲线。再将第二个边界条件代入上式，得

$$0 = C_1 \sin kl$$

由此解得

$$C_1 = 0, 或\ \sin kl = 0$$

若取 $C_1 = 0$，则由式(f)得 $w = 0$，即表明杆没有弯曲，仍保持直线形状的平衡形式，这与杆已发生微小弯曲变形的前提相矛盾。因此，只可能 $\sin kl = 0$。满足这一条件的 kl 值为

$$kl = n\pi, n = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

则由式(c)，得

$$k = \sqrt{\frac{F}{EI}} = \frac{n\pi}{l}$$

故

$$F = \frac{n^2\pi^2 EI}{l^2} \tag{g}$$

上式表明，无论 n 取何正整值，都有与其对应的力 F。但在实用上应取最小值。若取 $n = 0$，则 $F = 0$，这与讨论情况不符。所以应取 $n = 1$，相应的压力 F 即为所求的临界力

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \tag{9-1}$$

式中：E——压杆材料的弹性模量；

I——压杆横截面对中性轴的惯性矩；

l——压杆的长度。

此式一般称为两端铰支压杆临界力的欧拉公式。

从公式可以看出，临界力 F_{cr} 与杆的抗弯刚度 EI 成正比，而与杆长 l 的平方

成反比。这就是说，杆愈细长，其临界力愈小，即愈容易丧失稳定。

应该注意，对于两端以球铰支承的压杆，公式(9-1)中横截面的惯性矩 I 应取最小值 I_{min}。这是因为压杆失稳时，总是在抗弯能力为最小的纵向平面(即最小刚度平面)内弯曲。

现讨论压力 F 与压杆中截面挠度的关系，从中可进一步理解压杆稳定性的概念。将 $k=\frac{\pi}{l}$ 代入式(f)得压杆的挠度方程为

$$w=C_1\sin\frac{\pi x}{l}$$

在 $x=\frac{l}{2}$ 处，有最大挠度

$$w_{max}=C_1$$

常数 C_1 不能确定，得 F 与 w_{max} 的关系曲线为图 9-10 所示的水平线 AA'，这是由于采用挠曲线近似微分方程求解造成的，如采用挠曲线的精确微分方程式(6-2)，则得 $F-w_{max}$ 曲线如图 9-10 中 AC 所示。这种 $F-w_{max}$ 曲线称为压杆的平衡路径，它清楚显示了压杆的稳定性及失稳后的特性。当 $F\leqslant F_{cr}$，压杆只有一条平衡路径 OA，即直线形状下的平衡是稳定的。若 $F>F_{cr}$，平衡路径分支为两条——AB 和 AC 路径，其中直线形状平衡状态的平衡路径 AB 是不稳定的，因该路径上任意点 D 的平衡一经微弯干扰将不能恢复原状，

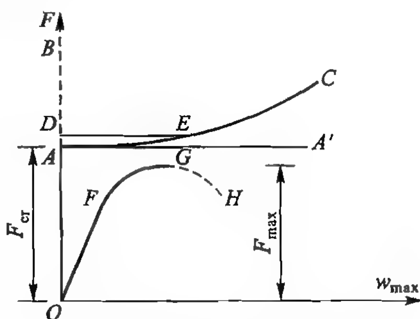


图 9-10

而达到 AC 路径上同一 F 值 E 点的弯曲变形平衡状态，且该位置的平衡是稳定的，因为使其进一步增大弯曲变形必须增大压力。理想压杆的这种失稳称为分支点失稳。

以上讨论是理想压杆的情况。而对实际使用的压杆来说，轴线的初弯曲、压力的偏心，材料的缺陷和不均匀等因素总是存在的，为非理想压杆。对其进行试验或理论分析所得平衡路径如图 9-10 的 $OFGH$ 曲线，无平衡路径分支现象，一经受压(无论压力多小)即处于弯曲变形的平衡状态，但也有稳定与不稳定之分。当压力 $F<F_{max}$，处于路径 OFG 段上的任一点，如施加使其弯曲变形微增的干扰，然后撤除，仍能恢复原状(当处于弹性变形范围)，或虽不能完全恢复原状(如已发生塑性变形)但仍能在原有压力下处于平衡状态，这说明原平衡状态是稳定的。而下降路径 GH 段上任一点的平衡是不稳定的，因一旦施加使其弯曲变形微增的干扰，如不减少压力，压杆将不能维持平衡而被压溃。非理想压杆的这种失稳称为极值点失稳。压力 F_{max} 称为失稳极值压力，它要比理想压杆的临界力 F_{cr} 小，且随压杆的缺陷(初弯曲，压力偏

心等）的减小而逐渐接近 F_{cr}。考虑到临界力 F_{cr}的计算比较简单，所以目前对压杆的稳定性计算仍多采用临界力。

例 9－1 试求图 9－1b 所示松木压杆的临界力。已知弹性模量 $E=9$ GPa，矩形截面的尺寸为：$b=30$ mm，$h=5$ mm，杆长 $l=1$ m。

解：先计算横截面的惯性矩

$$I_{min}=\frac{0.03\ \text{m}\times 0.005^3\ \text{m}^3}{12}=\frac{1}{32\times 10^8}\ \text{m}^4$$

杆的两端可简化为铰支，则由式（9－1），可得其临界力为

$$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{l^2}=\left(\frac{\pi^2\times 9\times 10^9}{1^2\times 32\times 10^8}\right)\ \text{N}=27.8\ \text{N}$$

由此可知，若轴向压力达到 27.8 N 时，此杆就会丧失稳定。

2. 其他约束情况下压杆的临界力

上面导出的是两端铰支压杆的临界力公式。当压杆的约束情况改变时，压杆的挠曲线近似微分方程和挠曲线的边界条件也随之改变，因而临界力的公式也不相同。仿照前面的方法，也可求得各种约束情况下压杆的临界力公式。如果在临界状态下，以两端铰支压杆的挠曲线形状（半波正弦曲线）为基本情况，将其他约束情况下的挠曲线形状与其对比，则可以得到欧拉公式的一般形式为

$$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} \tag{9-2}$$

式中的 μ 为不同约束条件下压杆的长度因数，μl 则相当于两端铰支压杆的半波正弦曲线的长度，称为相当长度。

几种理想的杆端约束情况下的长度因数列于表 9－1。

表 9－1 压杆的长度因数表

杆端约束情况	两端铰支	一端固定 另端自由	一端固定 另端铰支	两端固定
挠曲线形状	F_{cr}；l	F_{cr}；l；$2l$	F_{cr}；$0.7l$；l	F_{cr}；$\frac{l}{4}$；$\frac{l}{2}$；$\frac{l}{4}$；l
长度因数 μ	1.0	2.0	0.7	0.5

由表 9 - 1 可以看出，欲使长为 l 的一端固定另一端自由的压杆失稳，相当于使长度为 $2l$ 的两端铰支的压杆失稳；同样，对于一端固定一端铰支的压杆，因挠曲线的拐点在 $0.7l$ 处，故其相当长度为 $0.7l$；对两端固定的压杆，则与长度为 $0.5l$ 的两端铰支的压杆相当。

应该指出，上边所列的杆端约束情况，是典型的理想约束。实际上，在工程实际中杆端的约束情况是复杂的，有时很难简单地将其归结为那一种理想约束。应该根据实际情况作具体分析，看其与哪种理想情况接近，从而定出近乎实际的长度因数。下面通过几个实例说明杆端约束情况的简化。

1. 柱形铰约束

如图 9 - 11 所示的连杆，两端为柱形铰连接。考虑连杆在大刚度平面（xy 面）内弯曲时，杆的两端可简化为铰支（图 9 - 11a）；考虑在小刚度平面（xz 面）内弯曲时（图 9 - 11b），则应根据两端的实际固结程度而定，如接头的刚性较好，使其不能转动，就可简化为固定端；如仍可能有一定程度的转动，则可将其简化为两端铰支。这样处理比较安全。

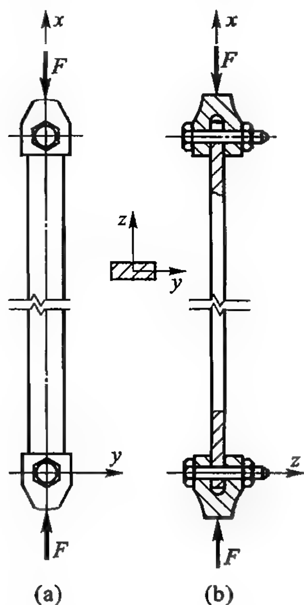


图 9 - 11

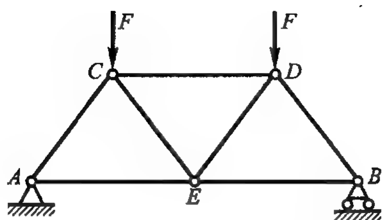


图 9 - 12

2. 焊接或铆接

对于杆端与支承处焊接或铆接的压杆，例如图 9 - 12 所示桁架腹杆 AC、EC 等及上弦杆 CD 的两端，可简化为铰支端。因为杆受力后连接处仍可能产生微小的转动，故不能将其简化为固定端。

3. 螺母和丝杠连接

这种连接的简化将随着支承套(螺母)长度 l_0 与支承套直径(螺母的螺纹平均直径)d_0 的比值 l_0/d_0(图 9－13)而定。当 $l_0/d_0<1.5$ 时,可简化为铰支端;当 $l_0/d_0>3$ 时,则简化成固定端;当 $1.5<l_0/d_0<3$ 时,则简化为非完全铰,若两端均为非完全铰,取 $\mu=0.75$。

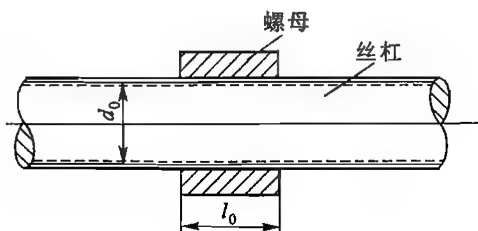


图 9－13

4. 固定端

对于与坚实的基础固结成一体的柱脚,可简化为固定端,如浇铸于混凝土基础中的钢柱柱脚。

总之,理想的固定端和铰支端约束是不多见的。实际杆端的连接情况,往往是介于固定端与铰支端之间。对应于各种实际的杆端约束情况,压杆的长度因数 μ 值,在有关的设计手册或规范中另有规定。在实际计算中,为了简单起见,有时将有一定固结程度的杆端简化为铰支端,这样简化是偏于安全的。

§9－3 欧拉公式的适用范围　中、小柔度杆的临界应力

欧拉公式是以压杆的挠曲线微分方程为依据推导出来的,而这个微分方程只有在材料服从胡克定律的条件下才成立。因此,当压杆内的应力不超过材料的比例极限时,欧拉公式才能适用。为了确定欧拉公式的适用范围,下面首先介绍临界应力和柔度的概念。

1. 临界应力和柔度

在临界力作用下压杆横截面上的平均应力,可以用临界力 F_{cr} 除以压杆的横截面面积 A 来求得,称为压杆的**临界应力**,并以 σ_{cr} 来表示。即

$$\sigma_{cr}=\frac{F_{cr}}{A}=\frac{\pi^2EI}{(\mu l)^2A} \tag{a}$$

上式中的 I 和 A 都是与截面有关的几何量,如将惯性矩表为 $I=i^2A$,则可用另一个几何量来代替两者的组合,即令:

$$\left.\begin{aligned} i_y &= \sqrt{\frac{I_y}{A}} \\ i_z &= \sqrt{\frac{I_z}{A}} \end{aligned}\right\} \tag{9-3}$$

式中 i_y 和 i_z 分别称为截面图形对 y 轴和 z 轴的惯性半径，其量纲为长度。各种几何图形的惯性半径都可从手册上查出。

将 $I=i^2A$ 代入式(a)，得

$$\sigma_{cr}=\frac{\pi^2 Ei^2}{(\mu l)^2}=\frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\mu l}{i}\right)^2}$$

令

$$\lambda=\frac{\mu l}{i} \tag{9-4}$$

可得到压杆临界应力的一般公式为

$$\sigma_{cr}=\frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \tag{9-5}$$

式中 λ 称为压杆的柔度或长细比，是一个量纲一的量，它反映了杆端约束情况、压杆长度、截面形状和尺寸等因素对临界力的综合影响。显然，若 λ 越大，则临界应力就越小，压杆越容易丧失稳定；反之，若 λ 越小，则临界应力就比较大，压杆就不太容易丧失稳定。所以，柔度 λ 是压杆稳定计算中的一个重要参数。

2. 欧拉公式的适用范围

前面已述，只有压杆的应力不超过材料的比例极限 σ_p 时，欧拉公式才能适用。因此，欧拉公式的适用条件是

$$\sigma_{cr}=\frac{\pi^2 E}{\lambda^2}\leqslant\sigma_p \tag{9-6}$$

由此式可求得对应于比例极限的柔度值为

$$\lambda_p=\pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} \tag{9-7}$$

因此欧拉公式的适用范围可以用压杆的柔度值 λ_p 来表示，即只有当压杆的实际柔度 $\lambda\geqslant\lambda_p$ 时，欧拉公式才适用。这一类压杆称为大柔度杆或细长杆。对于常用的 Q235 钢，弹性模量 $E=200$ GPa，比例极限 $\sigma_p=200$ MPa，代入上式后可算得 $\lambda_p=100$。也就是说，以 Q235 钢制成的压杆，其柔度 $\lambda\geqslant100$ 时，才能用欧拉公式计算其临界力。

由临界应力公式(9-5)可见，压杆的临界应力是随柔度而变的，它们之间的关系，可以用一个图形来表示。作一个坐标系，取临界应力 σ_{cr} 为纵坐标，柔度 λ 为横坐标，按公式(9-5)，可画出如图 9-14 所示的曲线 AB，称为欧拉双曲

线。欧拉公式的适用范围，也可以在此图上表出。曲线上的实线部分 BC，是适用部分；虚线部分 AC，由于应力已超过了比例极限，为无效部分。对应于 C 点的柔度即为 λ_p。

3. 中、小柔度杆的临界应力

工程实际中常用的压杆，其柔度往往小于 λ_p，这一类压杆的临界应力已不能再用欧拉公式来计算，通常是采用建立在试验基础上的经验公式。目前已有不少经验公式，如直线公式和抛物线公式等。其中以直线公式比较简单，应用方便，其形式为

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda \tag{9-8}$$

式中的 a 和 b 是与材料性能有关的常数，其单位均为 MPa。一些常用材料的 a、b 值见表 9－2。

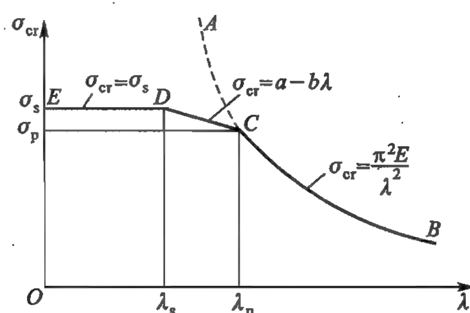


图 9－14

表 9－2　直线公式的系数 a 和 b 及适用的柔度范围

材　　料	a /MPa	b /MPa	λ_p	λ_s
Q235 钢	310	1.14	100	60
35 钢	469	2.62	100	60
45 钢	589	3.82	100	60
铸铁	338.7	1.483	80	
松木	40	0.203	59	

上述的经验公式也有一个适用范围。例如，对于由塑性材料制成的压杆，还应要求其临界应力不得到达材料的屈服点 σ_s，即要求

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda < \sigma_s$$

或

$$\lambda > \lambda_s = \frac{a-\sigma_s}{b} \tag{9-9}$$

故经验公式(9－8)的适用范围为 $\lambda_s < \lambda < \lambda_p$，即当压杆的柔度在 λ_p 与 λ_s 之间时，用经验公式计算其临界应力。在图 9－14 中，对应于 D 点的柔度为 λ_s。柔度在 λ_p 和 λ_s 之间的压杆称为中柔度杆或中长杆。

仍以 Q235 钢为例，其 $\sigma_s = 240$ MPa，$a = 310$ MPa，$b = 1.14$ MPa，将其代入式(9－9)，得

$$\lambda_s = \frac{a-\sigma_s}{b} = \frac{310-240}{1.14} \approx 60$$

由此可知，对于 Q235 钢的压杆，当 $60 < \lambda < 100$ 时，用经验公式计算临界应力，一些材料的 λ_p 和 λ_s 值也列于表 9－2 中。

柔度不超过 λ_s 的压杆，称为小柔度杆或短杆。试验表明，对于由塑性材料制成的这种压杆，当压力到达屈服点 σ_s 时即发生塑性屈服形式的破坏，破坏时很难观察到失稳现象，这说明短杆的破坏是因强度不够而引起的，因此应该以屈服点 σ_s 作为其极限应力。若在形式上仍采用稳定问题来处理，则可令临界应力 $\sigma_{cr} = \sigma_s$。在图 9－14 中以水平线段 DE 表示。同理，对于脆性材料，例如铸铁制成的压杆，则应以抗压强度极限 σ_{bc} 作为其临界应力。

上述三类压杆的临界应力与柔度间的关系图线（图 9－14）称为压杆的临界应力图。从图上可以明显地看出，短杆的临界应力与 λ 无关，而中、长杆的临界应力则随 λ 的增加而减小。

例 9－2 一截面为 $120 \times 200\ \text{mm}^2$ 的矩形木柱，长 $l = 4$ m，其支承情况是：在最大刚度平面内弯曲时为两端铰支（图 9－15a）；在最小刚度平面内弯曲时为两端固定（图 9－15b）。木柱为松木，其弹性模量 $E = 10$ GPa，试求木柱的临界力和临界应力。

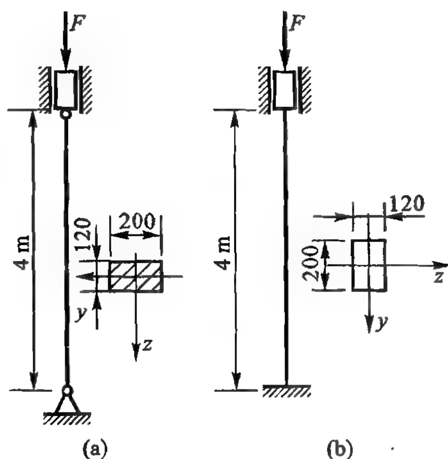


图 9－15

解：由于最小与最大刚度平面内的支承情况不同，所以需分别计算。

(1) 计算最大刚度平面内的临界力和临界应力　考虑压杆在最大刚度平面内失稳时，由图 9－15a，截面的惯性矩应为

$$I_z = \frac{120 \times 200^3}{12}\ \text{mm}^4 = 8 \times 10^{-5}\ \text{m}^4$$

由公式(9－3)，相应的惯性半径为

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{8 \times 10^{-5}\ \text{m}^4}{0.12\ \text{m} \times 0.2\ \text{m}}} = 5.77 \times 10^{-2}\ \text{m}$$

两端铰支时，长度因数 $\mu = 1$，由公式(9－4)，算得其柔度为

$$\lambda=\frac{\mu l}{i_z}=\frac{1\times 4\ \text{m}}{5.77\times 10^{-2}\ \text{m}}=69.3>\lambda_p=59$$

因柔度大于 λ_p，故其临界力可用欧拉公式计算。

由公式(9－2)，

$$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI_z}{(\mu l)^2}=\frac{\pi^2\times 10\times 10^9\ \text{N/m}^2\times 8\times 10^{-5}\ \text{m}^4}{(1\times 4\ \text{m})^2}$$

$$=493.5\ \text{kN}$$

再由公式(9－5)，得临界应力

$$\sigma_{cr}=\frac{\pi^2 E}{\lambda^2}=\frac{\pi^2\times 10\times 10^9}{69.3^2}\ \text{N/m}^2=20.55\ \text{MPa}$$

(2) 计算最小刚度平面内的临界力及临界应力　由图 9－15b，此时截面的惯性矩为

$$I_y=\frac{200\times 120^3\ \text{mm}^4}{12}=2.88\times 10^{-5}\ \text{m}^4$$

由式(9－3)，相应的惯性半径为

$$i_y=\sqrt{\frac{I_y}{A}}=\sqrt{\frac{2.88\times 10^{-5}\ \text{m}^4}{0.12\times 0.2\ \text{m}^2}}=3.46\times 10^{-2}\ \text{m}$$

两端固定时长度因数 $\mu=0.5$，由式(9－4)算得其柔度为

$$\lambda=\frac{\mu l}{i_y}=\frac{0.5\times 4\ \text{m}}{3.46\times 10^{-2}\ \text{m}}=57.8<\lambda_p=59$$

由于在此平面内弯曲时杆的柔度小于 λ_p，故应该用经验公式计算其临界应力。

由表 9－2 查得，对于木材，$a=40$ MPa，$b=0.203$ MPa，则由式(9－8)，

$$\sigma_{cr}=a-b\lambda=(40-0.203\times 57.8)\ \text{MPa}=28.27\ \text{MPa}$$

故其临界力为

$$F_{cr}=\sigma_{cr}A=28.27\times 10^6\ \text{N/m}^2\times(0.12\times 0.2)\ \text{m}^2=678.5\ \text{kN}$$

比较计算结果可知，第一种情况的柔度大，因而临界力小，所以压杆失稳将发生在最大刚度平面。木柱的临界力 $F_{cr}=493.5$ kN，临界应力 $\sigma_{cr}=20.55$ MPa。此例说明，当在最小刚度平面与最大刚度平面内支承情况不同时，压杆一定在与最大柔度相应的平面内失稳，但它不一定是最小刚度平面。

§9－4 压杆的稳定计算

压杆的稳定计算包括压杆稳定性的校核和压杆截面的选择等。在机械设计中，往往是根据构件的工作需要或其他方面的要求初步确定构件的截面，然后再校核其稳定性，常采用如下的安全因数法。

对于工程实际中的压杆，要使其不丧失稳定，就必须使压杆所承受的轴向压力 F 小于压杆的临界力。为了安全起见，还要考虑一定的安全因数，使压杆具有足够的稳定性。因此，压杆的稳定条件为

$$F\leqslant\frac{F_{cr}}{[n_{st}]}\qquad(9-10)$$

或

$$n_{st}=\frac{F_{cr}}{F}\geqslant[n_{st}] \tag{9-11}$$

式中：F——压杆的工作压力；

F_{cr}——压杆的临界力，细长杆按欧拉公式计算；中长杆则按经验公式算出临界应力 σ_{cr}后，再乘以横截面积 A 而得；

n_{st}——压杆的工作稳定安全因数；

$[n_{st}]$——规定稳定安全因数。

考虑到压杆存在的初曲率和不可避免的载荷偏心等不利影响，规定的稳定安全因数一般都比强度安全因数大一些。在静载荷下的$[n_{st}]$值见表 9－3，结合具体构件，有关规范中还另有规定。例如，机床丝杠的稳定安全因数取 2.5～4，活塞杆取 4～8。矿山和冶金设备中的压杆，其稳定安全因数取得都比较大（4～8），这是因为这些设备的载荷比较复杂，变化幅度较大，而且动载荷的影响也较大的缘故。

表 9－3　规定稳定安全因数$[n_{st}]$

材　料	钢	木　材	铸　铁
$[n_{st}]$	1.8～3.0	2.5～3.5	4.5～5.5

还应指出，有时也会碰到压杆在局部截面被削弱的情况（例如杆上开有小孔或沟槽），由于压杆的临界力是从整个压杆的弯曲变形来决定的，局部的截面削弱对临界力的影响很小，所以在稳定计算中不予考虑。但是，对于这类压杆，必要时还应对削弱了的横截面进行强度校核。

例 9－3　千斤顶如图 9－16 所示，丝杠长度 $l=375$ mm，内直径 $d=40$ mm，材料为 45 钢，最大起重量 $F=80$ kN，规定的稳定安全因数$[n_{st}]=4$。试校核丝杠的稳定性。

解：

（1）计算柔度　丝杠可简化为下端固定、上端自由的压杆，长度因数取 $\mu=2$。又由式（9－3），丝杠的惯性半径为

$$i=\sqrt{\frac{I}{A}}=\sqrt{\frac{\frac{\pi d^4}{64}}{\frac{\pi d^2}{4}}}=\frac{d}{4}=\frac{40\ \text{mm}}{4}=10\ \text{mm}$$

故由式（9－4），丝杠的柔度为

$$\lambda=\frac{\mu l}{i}=\frac{2\times375\ \text{mm}}{10\ \text{mm}}=75$$

由表 9－2 中查得，45 钢的 $\lambda_s=60$，$\lambda_p=100$，此丝杠的柔度介于两者之间，为中柔度杆，故应该用经验公式计算其临界力。

(2) 计算临界力,校核稳定性　又由表 9 - 2 查得:$a = 589\ \text{MPa}$,$b = 3.82\ \text{MPa}$,利用中长杆的临界应力公式(9 - 8),可得丝杠的临界力为

$$F_{cr} = \sigma_{cr}A = (a - b\lambda)\frac{\pi d^2}{4} = (589 \times 10^6 - 3.82 \times 10^6 \times 75)\ \text{N/m}^2 \times \frac{\pi \times 0.04^2\ \text{m}^2}{4} = 380\ 133\ \text{N}$$

由公式(9 - 11),丝杠的工作稳定安全系数为

$$n_{st} = \frac{F_{cr}}{F} = \frac{380\ 133\ \text{N}}{80\ 000\ \text{N}} = 4.75 > [n_{st}] = 4$$

校核结果可知,此千斤顶丝杠是稳定的。

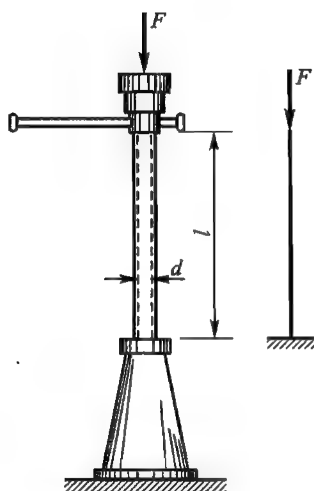


图 9 - 16

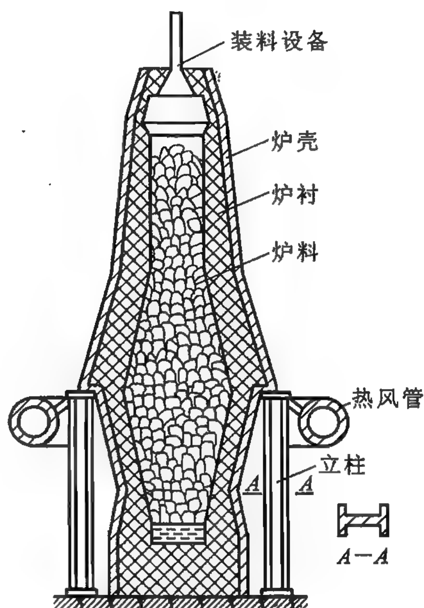


图 9 - 17

例 9 - 4　小高炉炉体由八根 20a 工字钢支柱支撑(图 9 - 17)。柱高 $l = 3$ m,下端以螺栓固定于基础,上端焊接在炉体上;材料为 Q235 钢,规定的稳定安全因数 $[n_{st}] = 3$。设每根支柱所受到的载荷为 $F = 80$ kN,试校核支柱的稳定性。

解:

(1) 计算柔度　支柱两端在两个纵向对称平面内的支承形式相同,为偏于安全可简化为两端铰支,取 $\mu = 1$。由型钢表查得:20a 工字钢横截面的最小惯性矩为 $I_{min} = 158 \times 10^{-8}\ \text{m}^4$,最小惯性半径 $i_{min} = 2.12 \times 10^{-2}$ m。由式(9 - 4)可得支柱的柔度为

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} = \frac{1 \times 3\ \text{m}}{0.021\ 2\ \text{m}} = 141.5 > \lambda_p = 100$$

说明这是一个大柔度杆,应由欧拉公式计算其临界力。

(2) 计算临界力,校核稳定　由公式(9 - 2),支柱的临界力为

$$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}=\frac{\pi^2\times 200\times 10^9\ \text{N/m}^2\times 158\times 10^{-8}\ \text{m}^4}{(1\times 3)^2\ \text{m}^2}=346\ 533\ \text{N}$$

由公式(9－11),支柱的工作稳定安全因数为

$$n_{st}=\frac{F_{cr}}{F}=\frac{346\ 533\ \text{N}}{80\ 000\ \text{N}}=4.33>[n_{st}]=3$$

结果说明,此小高炉的支柱是稳定的。

例 9－5 简易起重机如图 9－18 所示,起重臂 OA 长 $l=2.7$ m,由外径 $D=80$ mm,内径 $d=70$ mm的无缝钢管制成;材料为 Q235 钢,规定的稳定安全因数 $[n_{st}]=3$,试确定起重臂的许用载荷。

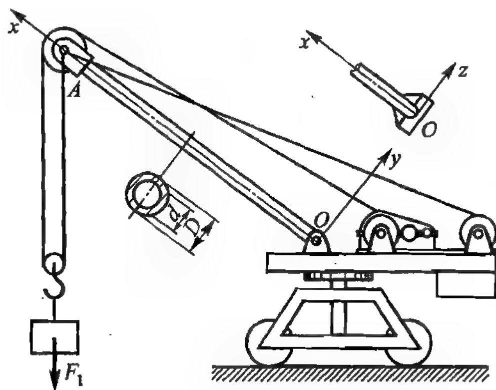


图 9－18

解:

(1)计算柔度　由图示的构造情况,考虑起重臂在平面 Oxy 内失稳时,两端可简化为铰支;考虑在平面 Oxz 内失稳时,应简化为一端固定,另一端自由。显然,应根据后一情况来计算起重臂的柔度最大,取长度因数 $\mu=2$。

又圆管横截面的惯性半径为

$$i=\sqrt{\frac{I}{A}}=\sqrt{\frac{\frac{\pi}{64}(D^4-d^4)}{\frac{\pi}{4}(D^2-d^2)}}=\frac{1}{4}\sqrt{(80)^2+(70)^2}\ \text{m}=26.6\ \text{mm}$$

则由式(9－5),起重臂的柔度为

$$\lambda=\frac{\mu l}{i}=\frac{2\times 2.7\ \text{m}}{26.6\times 10^{-3}\ \text{m}}=203>\lambda_p=100$$

故知起重臂为大柔度杆,应按欧拉公式计算其临界力。

(2) 计算临界力,确定安全载荷　圆管横截面的惯性矩为

$$I=\frac{\pi}{64}(D^4-d^4)=\frac{3.14}{64}\times(80^4-70^4)\ \text{mm}^4=83.2\times 10^{-8}\ \text{m}^4$$

由式(9－2),起重臂的临界力为

$$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}=\frac{3.14^2\times 200\times 10^9\ \text{N/m}^2\times 83.2\times 10^{-8}\ \text{m}^4}{(2\times 2.7)^2\ \text{m}^2}=56\ 263\ \text{N}$$

由稳定条件式(9－10)，起重臂的许用载荷为

$$F=\frac{F_{cr}}{[n_{st}]}=\frac{56\ 263\ \text{N}}{3}=18\ 754\text{N}\approx 18.8\ \text{kN}$$

求得起重臂的许用载荷后，再考虑 A 点滑轮轴的平衡，即可求得起重机的许用起重量 F_1。

例 9－6 一根 35 钢的圆截面直杆，长 $l=7$ m，受轴向压力 $F=160$ kN 作用。两端铰支，材料的弹性模量 $E=200$ GPa，许用稳定安全因数 $[n_{st}]=2.5$。求压杆所需直径 d。

解：因压杆直径待求，其柔度就不能首先计算，从而就不能确定使用哪一个临界力公式。因此可采用如下试算法

(1) 假定为大柔度杆，则临界力为

$$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}=\frac{\pi^2 E\dfrac{\pi d^4}{64}}{(\mu l)^2}$$

将 $F_{cr}=[n_{st}]F=2.5\times 160\ \text{kN}=400\ \text{kN}$，以及其他已知数据代入上式，解得

$$d=\sqrt[4]{\frac{64F_{cr}(\mu l)^2}{\pi^3 E}}=\sqrt[4]{\frac{64\times 400\times 10^3\ \text{N}\times(1\times 700\ \text{mm})^2}{\pi^3\times 200\times 10^3\ \text{N/mm}^2}}=37.7\ \text{mm}$$

取 $d=d'=38$ mm。

现检查 λ 值是否属大柔度杆

$$\lambda'=\frac{\mu l}{i}=\frac{\mu l}{d/4}=\frac{1\times 700\ \text{mm}}{38\ \text{mm}/4}=73.7<\lambda_p=100$$

与原设不符。

(2) 改设压杆为中柔度杆 则临界力 $F_{cr}=(a-b\lambda)A=\left(a-b\dfrac{\mu l}{d/4}\right)\dfrac{\pi}{4}d^2$。将 $F_{cr}=[n_{st}]F=2.5\times 160\ \text{kN}=400\ \text{kN}$ 及由表 9－2 查得的 $a=469\ \text{N/mm}^2$，$b=2.62\ \text{N/mm}^2$ 代入上式，整理得

$$469d^2-7\ 336\ d\text{mm}-509\ 296\ \text{mm}^2=0$$

解得

$$d=41.7\ \text{mm}，取\ d=d''=42\ \text{mm}$$

现检查 λ 值是否属中柔度杆

$$\lambda''=\frac{\mu l}{i}=\frac{1\times 700\ \text{mm}}{42\ \text{mm}/4}=66.7\ \begin{matrix}<\lambda_p=100\\ >\lambda_s=60\end{matrix}$$

确实落在中柔度杆范围，压杆直径最后确定为

$$d=d''=42\ \text{mm}$$

§9－5 提高压杆稳定性的措施

如前所述，某一压杆的临界力和临界应力的大小，反映了此压杆稳定性的高低。因此，欲提高压杆的稳定性，关键在于提高压杆的临界力或临界应力。由压杆的临界应力图(图 9－14)可见，压杆的临界应力与材料的力学性能和压杆的

柔度有关，而柔度$\left(\lambda=\frac{\mu l}{i}\right)$又综合了压杆的长度、约束情况和横截面的惯性半径等影响因素。因此，可以根据这些因素，采取适当的措施来提高压杆的稳定性。

(1) 减小压杆的支承长度

压杆的柔度越小，相应的临界力或临界应力就越高，而减小压杆的支承长度是降低压杆柔度的方法之一，可有效地提高压杆的稳定性。因此，在条件允许的情况下，应尽可能地减小压杆的长度；或者在压杆的中间增加支座，也同样起到减小压杆支承长度的作用。例如厂矿中架空管道的支柱（图 9-19），每根支柱都受轴向压力。如在两支柱间加上横向和斜向支撑，这相当于在每个支柱的中间增加了支座，减小了压杆的支承长度，从而提高了支柱的稳定性。又如，钢铁厂无缝钢管车间的穿孔机（图 9-20），原来轧制普通钢管，后改轧合金钢管，要求顶杆的穿孔压力增大，为了提高顶杆的稳定性，在顶杆中段增加一个抱辊装置，这就达到了提高顶杆稳定性的目的。

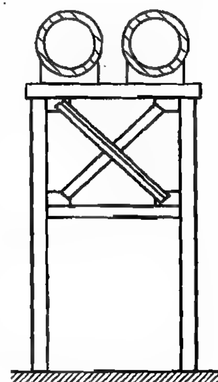


图 9-19

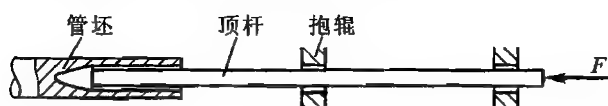


图 9-20

(2) 选择合理的截面形状

压杆的截面形状对临界力的数值有很大影响。若截面形状选择合理，可以在不增加截面面积的情况下增加横截面的惯性矩 I，从而增大惯性半径，减小压杆的柔度，起到提高压杆稳定性的作用。为此，应尽量使截面材料远离截面的中性轴。例如，空心圆管的临界力就要比截面面积相同的实心圆杆的临界力大得多。

对在两个纵向对称平面内杆端约束相同的压杆，为使其在两个平面内的稳定性相同，应使横截面的最大和最小惯性矩相等，即$I_{max}=I_{min}$。例如，由两槽钢组合的压杆，如采用图 9-21b 所示的组合形式，其稳定性要比图 9-21a 所示的形式为好；如果两槽钢的距离 a 选取恰当，使 $I_y=I_z$，则可使压杆在两个平面内的稳定性相等。

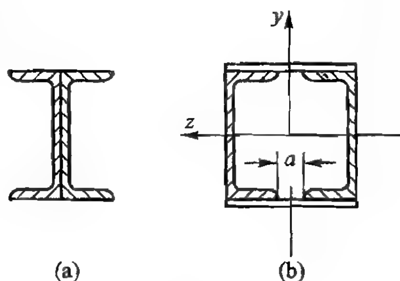


图 9-21

(3) 改善杆端的约束情况

从表 9-1 中可以看出，若杆端约束的刚

性愈强，压杆的长度因数 μ 就愈小，相应的，柔度 λ 就愈低，临界力就愈大。其中以固定端约束的刚性最好，铰支端次之，自由端最差。因此，尽可能加强杆端约束的刚性，就能使压杆的稳定性得到相应的提高。

(4) 合理地选用材料

上述各点，都是通过降低压杆柔度的方法来提高压杆的稳定性；另一方面，合理地选用材料，对提高压杆稳定性也能起到一定的作用。

对于大柔度杆，由式(9-2)可知，材料的弹性模量 E 愈大，压杆的临界力就愈高。故选用弹性模量较大的材料可以提高压杆的稳定性。但须注意，由于一般钢材的弹性模量 E 大致相同，且临界压力与材料的强度指标无关，故选用高强度钢并不能起到提高细长压杆稳定性的作用。

对于中柔度杆，由表9-2可知，采用强度高的优质钢，系数 a 显著增大，按式 $\sigma_{cr}=a-b\lambda$，压杆临界应力也就较高，故其稳定性好。



小　结

1. 学习本章时，应理解好压杆稳定的概念。所谓压杆的稳定性是指压杆在轴向压力作用下，维持原有变形状态下受力平衡的能力，这与强度和刚度的概念有着本质的区别。检验压杆是否稳定的静力学准则就是对原有的平衡状态施加一个小的扰动，如消除扰动，压杆仍能回复到原来平衡形式，则压杆原来的平衡状态是稳定的，反之，则是不稳定的。

2. 临界力 F_{cr} 是判断压杆是否处于稳定平衡的重要依据。它是一个与外载无关，只与压杆截面、材料、支座约束有关，反应其承载能力的力学量。确定压杆的临界力是解决压杆稳定性问题的关键，也是本章的重点。

3. 压杆的临界力计算，因压杆的柔度不同分为两类，即：

对于大柔度杆($\lambda \geqslant \lambda_p$)

$$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}\text{或}\frac{\pi^2 E}{\lambda^2}A$$

对于中柔度杆($\lambda_p>\lambda>\lambda_s$)

$$F_{cr}=(a-b\lambda)A$$

至于 $\lambda \leqslant \lambda_s$ 的小柔度杆则无失稳问题，应按强度问题考虑。

4. 压杆的柔度 $\lambda=\dfrac{\mu l}{\sqrt{I/A}}=\dfrac{\mu l}{i}$ 是计算临界力的一个重要参数，它反映了压杆长度 l、横截面面积 A 和轴惯性矩 I 及支座约束 μ 对临界力的影响。由于压杆在不同纵向对称平面内失稳，其惯性矩 I 和长度系数 μ 可能不同，因而柔度值也就不同(如例9-2、例9-4、和例9-5)，在计算柔度时，一定要特别注意这一点。

5. 压杆的稳定计算常采用安全因数法，其稳定条件为

$$n_{st}=\frac{F_{cr}}{F}\geqslant[n_{st}]$$

应用这一稳定条件除可校核压杆的稳定性外，还可确定压杆的许用载荷或确定压杆所需的截面尺寸。

6. 在进行压杆的稳定性计算时，应注意以下几点：

(1) 首先必须根据压杆支座的约束情况进行简化，确定在不同纵向对称平面内反映支座约束的长度因数μ和轴惯性矩。

(2) 其次一定要按最可能在哪个纵向对称平面内失稳的情况确定压杆的临界力。如果在各纵向对称平面内长度因数相同，则失稳将发生在轴惯性矩较小的纵向对称平面（如例9-4）；如各纵向对称平面的轴惯性矩相等（例如圆形、正方形截面），则失稳将发生在长度因数μ大的纵向对称平面（如例9-5），如两正交纵向对称平面的约束情况和轴惯性矩均不相同，则失稳将发生在与最大柔度相对应的纵向对称平面内（如例9-2）。

(3) 计算临界力时，须先算出压杆的柔度值，然后根据该数值选定相适应的临界力公式。如要选择压杆的截面尺寸时，不能首先确定柔度，此时可采用试算法，先假设压杆的类型（大柔度或中柔度杆），待算得截面尺寸定下柔度后，再检验该柔度是否落入假设压杆类型的柔度范围，如不符合，则再改设另一类型压杆计算，并对确定下的柔度再作检验，看是否与改设的柔度范围相符。如大、中柔度杆试算均不成立，则为小柔度杆，此压杆无失稳问题。



思考题

9-1 构件的强度、刚度和稳定性有什么区别？

9-2 如何区别压杆的稳定平衡和不稳定平衡？

9-3 压杆的弯曲变形与失稳有何区别与联系？

9-4 为什么直杆受轴向压力作用有失稳问题，而受轴向拉力作用就无失稳问题呢？

9-5 两端为球铰的压杆，其横截面分别如图9-22所示各形状，试在图上画出压杆失稳时、横截面转动所绕的轴线（图中C为截面的形心）。

9-6 据支座对变形的限制情况，分别画出图9-23所示各压杆在临界力作用下微弯的曲线形状，并通过与两端球铰的压杆微弯曲线形状的比较，写出相应压杆的长度因数μ值。

9-7 对于两端铰支，由Q235钢制的圆截面杆，问杆长l与直径d的比值应满足什么条件，才能应用欧拉公式？

9-8 计算临界力时，如对中柔度杆误用欧拉公式，或对大柔度杆误用直线公式，将使计算结果比实际情况偏大还是偏小？

9-9 压杆的临界力与临界应力有何区别与联系？是否临界应力愈大的压杆，其稳定性

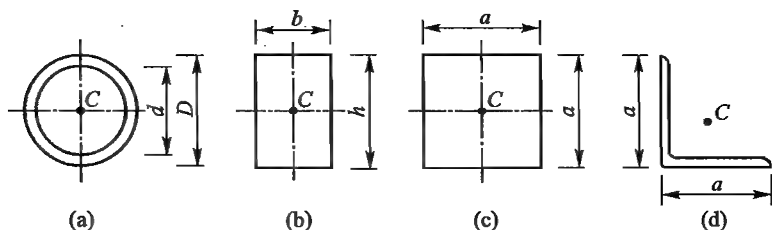


图 9－22

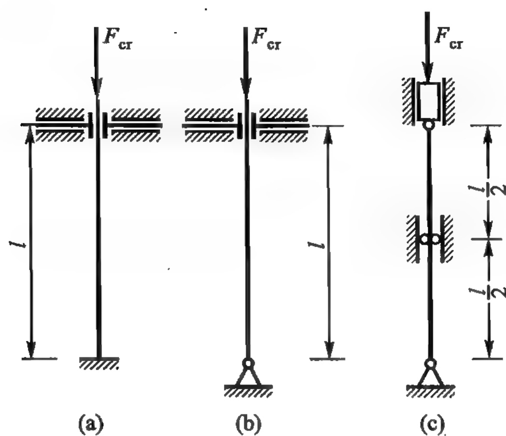


图 9－23

也愈好？

9－10 一细长压杆如图 9－24 所示，杆长 l，其临界力 $F_{cr}=\dfrac{\pi^2 EI_z}{(2l)^2}$，如其长度增至 $2l$，其临界力是否一定为 $F_{cr}/4$，而长度减至 $l/2$，其临界力是否一定为 $4F_{cr}$？

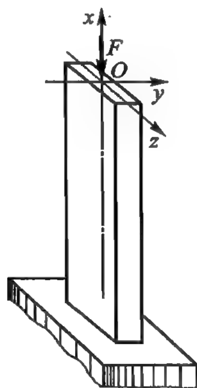


图 9－24

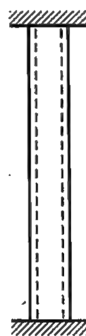


图 9－25

9－11 如图 9－25 所示的细长钢管，在常温条件下安装，两端固定。若钢管工作时的温度较高，问对此钢管除应考虑温度应力外，是否还有稳定问题？其临界应力如何计算？

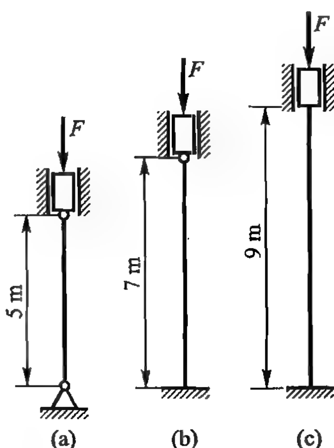
习 题

9-1 图示的细长压杆均为圆截面杆，其直径 d 均相同，材料是 Q235 钢，$E=210$ GPa。其中：图 a 为两端铰支；图 b 为一端固定，另一端铰支；图 c 为两端固定。试判别哪一种情形的临界力最大，哪种其次，哪种最小？若圆杆直径 $d=160$ mm，试求最大的临界力 F_{cr}。

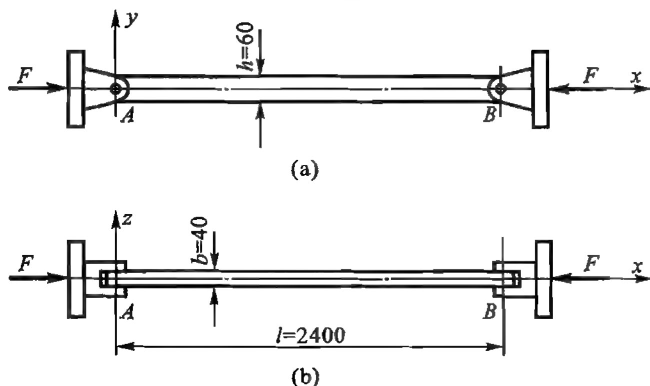
9-2 图示压杆的材料为 Q235 钢，$E=210$ GPa，在正视图 a 的平面内，两端为铰支，在俯视图 b 的平面内，两端认为固定。试求此杆的临界力。

9-3 图示立柱由两根 10 槽钢组成，立柱上端为球铰，下端固定，柱长 $l=6$ m，试求两槽钢距离 a 值取多少立柱的临界力最大？其值是多少？已知材料的弹性模量 $E=200$ GPa，比例极限 $\sigma_p=200$ MPa。

9-4 图示结构 AC 的 AB 段为圆截面直杆，直径 $d=80$ mm，A 端固定，B 端与直杆 BC 球铰连接。BC 段杆为正方形截面，边长 $a=70$ mm，C 端也是球铰。两杆材料相同，弹性模量 $E=200$ GPa，比例极限 $\sigma_p=200$ MPa，长度 $l=3$ m，试求该结构的临界力。



题 9-1 图



题 9-2 图

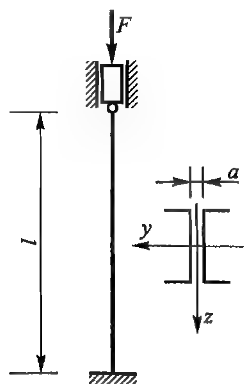
9-5 图示托架中杆 AB 的直径 $d=40$ mm，长度 $l=800$ mm，两端可视为铰支，材料是 Q235 钢。

(1) 试按杆 AB 的稳定条件求托架的临界力 F_{cr}；

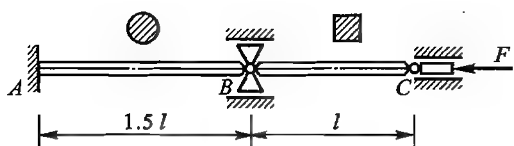
(2) 若已知实际载荷 $F=70$ kN，稳定安全因数 $[n_{st}]=2$，问此托架是否安全？

9-6 悬臂回转吊车如图所示，斜杆 AB 由钢管制成，在 B 点为柱铰（在垂直图面视为固定端）；钢管的外径 $D=100$ mm，内径 $d=86$ mm，杆长 $l=3$ m；材料为 Q235 钢，$E=200$ GPa，起

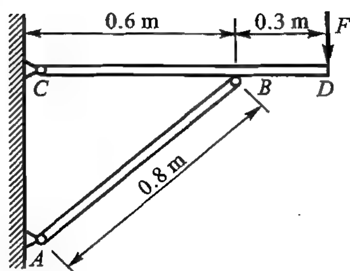
重量 $F=20$ kN，稳定安全因数 $[n_{st}]=2.5$。试校核斜杆的稳定性。



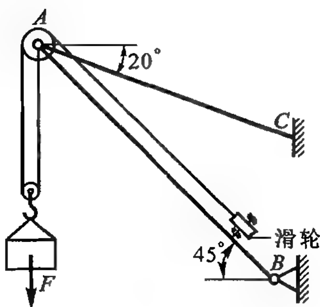
题 9－3 图



题 9－4 图

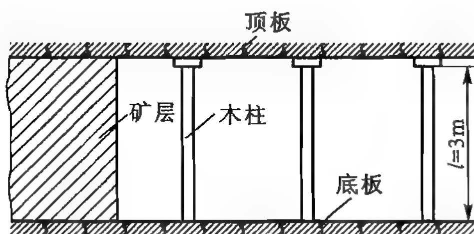


题 9－5 图



题 9－6 图

9－7 矿井采空区在充填前为防止顶板陷落，常用木柱支撑，若木柱为红松，弹性模量 $E=10$ GPa，直径 $d=140$ mm，规定稳定安全因数 $[n_{st}]=4$，试求木柱所允许承受的顶板最大压力。



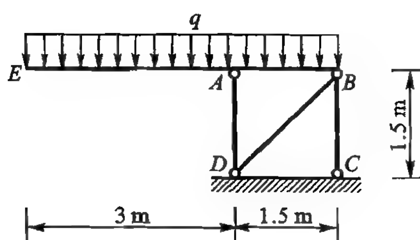
题 9－7 图

9－8 螺旋千斤顶（图 9－16）的最大起重量 $F=150$ kN，丝杠长 $l=0.5$ m，材料为 45 钢，$E=210$ GPa，规定稳定安全因数 $[n_{st}]=4.2$，试求丝杠所允许的最小内直径（提示：可采用试

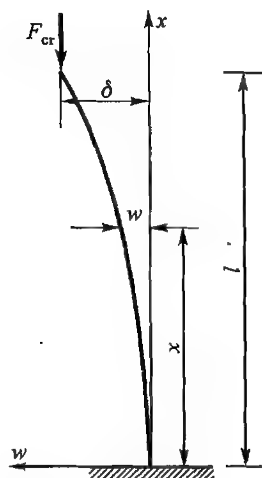
算法）。

9－9　一根20a号工字钢的直杆，长 $l=6$ m，两端固定，在温度 $T_1=20$ ℃时进行安装，此时杆不受力。若知钢的线膨胀系数 $\alpha=1.25\times10^{-5}$ 1/℃，$E=210$ GPa，试问当温度升高到多少度时，杆将丧失稳定。

9－10　图示结构，AD 为铸铁圆杆，直径 $d_1=60$ mm，弹性模量 $E=91$ GPa，许用压应力 $[\sigma_c]=120$ MPa，规定稳定安全因数 $[n_{st}]=5.5$。横梁 EB 为18号工字钢，BC、BD 为直径 $d=10$ mm 的直杆，材料均为Q235钢，许用应力 $[\sigma]=160$ MPa，各杆间的连接均为铰接。试求该结构的许用载荷 $[q]=?$



题9－10图



题9－11图

9－11　试用静力法推导图示一端固定、另一端自由等截面直杆在微弯状态平衡下的压杆临界力 F_{cr} 计算式。已知杆长 l，截面轴惯性矩 I 及材料的弹性模量 E。

第十章　材料的力学性能

前面曾介绍了拉伸和压缩时材料的力学性能,其应力－应变曲线和各项性能指标都是在常温、静载条件下测得的,这是材料最基本的力学性能。但是在工程实际中,也有一些设备是在高温、动载等各种不同条件下工作的,随着温度、加载速度等工作条件的不同,材料所表现的力学性能也不一样。

除了外在条件(温度、加载速度等)的影响外,材料的力学性能从根本上说还是取决于内在因素(化学成分、宏观和微观组织等)。例如,对于高强度钢或大型构件,所存在的宏观裂纹对材料抵抗破坏的能力有很大的影响;又如不同化学成分或同一化学成分经不同热处理的材料,所表现的力学性能也可能有很大的差异。所以还必须了解宏观裂纹、化学成分和微观组织等对材料力学性能的影响。

本章将结合上述因素对材料的力学性能作进一步的介绍。

了解和掌握材料的力学性能,不仅是进行构件强度、刚度等计算和正确选材所必需的,而且也是研制新材料,制定热处理、焊接等工艺方案的重要依据。

§10－1　高温下材料的力学性能

在冶金、动力、航空等工业部门,有些设备是在高温下工作的。随着温度的升高,金属中原子的运动和组织结构等将发生改变,从而导致材料力学性能的显著变化。很明显,金属内部发生上述变化的程度不仅与温度有关,而且还与高温持续时间的长短有关。因此,载荷作用时间的长短对材料在高温下的力学性能有很大影响。下面分别介绍短时高温和长时高温下材料的力学性能。

1. 短时高温下材料的力学性能

材料在短时高温下的拉伸试验与常温下的拉伸试验方法基本相同,不同之处只是各项性能指标是在使试件保持为某一高温下测得的。

金属材料在短时高温下其力学性能的主要变化是:随着温度的升高,材料的强度将降低,而塑性增高,但是,钢在不太高的温度下稍有些例外。图10－1绘出了低碳钢(含碳0.15%)的各项性能指标随温度升高而变化的情况,由图可知:

① 随温度升高,抗拉强度 σ_b 先是上升然后下降,塑性指标 δ、ψ 则是先下降

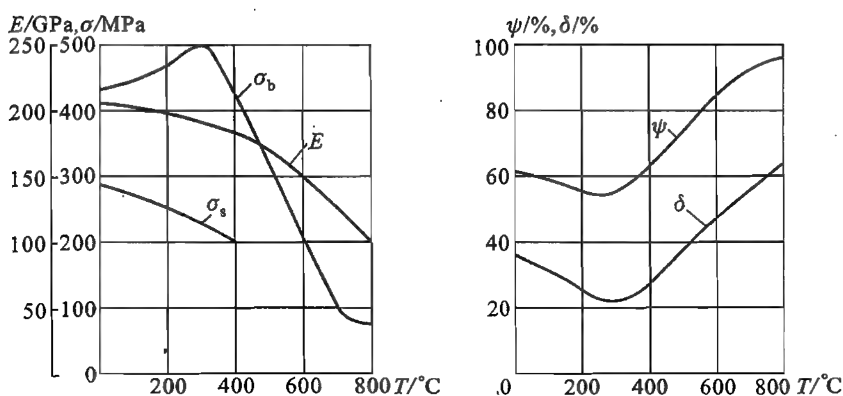


图 10－1

而后上升，在 250～350 ℃之间，抗拉强度最高，而塑性最低，钢变得很脆，这种现象称为兰脆。

② 随温度升高屈服点 σ_s 不断下降，到 400 ℃时屈服现象即行消失。

③ 材料的弹性模量 E 随温度升高而下降。

2. 蠕变

(1) 蠕变现象

在一定温度和不变应力（低于屈服点）作用下，材料随时间增加而缓慢地发生塑性变形的现象称为蠕变，例如沥青在自重的作用下会渐渐地流动，就是一种蠕变现象。金属材料并非在任何温度下都有蠕变。一般低熔点金属（铅、锌等）在室温下就有蠕变，而像钢等高熔点金属只有在高温下才有蠕变。例如碳钢当温度超过 300～350 ℃，合金钢温度超过 350～400 ℃，轻合金温度超过 50～150 ℃时才有较明显的蠕变现象。

温度越高，使材料产生蠕变所需的应力越小，甚至小于材料的比例极限；而且温度越高，在应力不变的情况下蠕变速度也越快。因此处于长期高温下工作的设备，蠕变会影响到设备的正常工作，甚至造成损坏。例如高温、高压下长期工作的管道，因蠕变持续进行，管径不断变大，管壁逐渐变薄，最后甚至发生破裂。所以必须研究材料的蠕变规律、测定材料抵抗蠕变能力的性能指标，才能正确选材和进行安全设计。

(2) 蠕变规律

为了研究材料的蠕变规律，可以将试样保持一定的拉力和温度，不断测量试样长度的变化，将试样蠕变伸长率 δ 随时间 t 变化的关系画成曲线，即得到反映材料蠕变规律的曲线，称为蠕变曲线。图 10－2 是金属材料典型的蠕变曲线。图中横坐标表示时间 t，纵坐标表示试样的蠕变伸长率 δ，因此曲线上任一点的

斜率即表示该时刻的蠕变速度。开始加载时的瞬间相对伸长量为 OA，此后所发生的变形即为蠕变变形。整个蠕变过程可分为三个阶段：第一阶段（曲线 AB 段）蠕变速度逐渐减小；第二阶段（直线 BC 段）蠕变速度恒定；第三阶段（曲线 CD 段）蠕变速度不断增加，直到断裂。

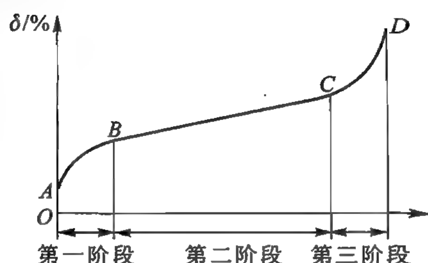


图 10－2

各种金属的蠕变曲线决定于材质，但也决定于温度 T 和应力 σ 的大小。对给定的材料来说，当应力较小或温度较低时，蠕变匀速阶段长而且蠕变速度也低；反之，当应力大或温度高时，蠕变匀速阶段短，甚至没有匀速阶段而只有第一、第三阶段，整个蠕变过程进行得较快，试样在较短时间内就发生断裂，如图 10－3 所示。

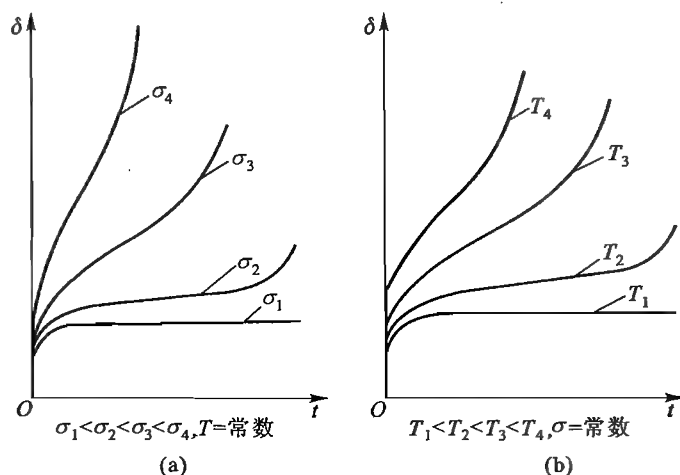


图 10－3

（3）蠕变极限和持久强度极限

为了保证长时高温条件下某些设备的正常工作，在整个使用期间内，对构件的蠕变变形量须有一定的限制。在工程实际中常以蠕变极限作为衡量材料抵抗蠕变变形能力的性能指标。所谓**蠕变极限**有以下两种表示方法：

（i）在规定温度 T 和恒定拉力负荷下，试样在规定时间 t 内的蠕变伸长率 δ（总伸长率 δ_z 或塑性伸长率 δ_s）不超过某一规定值的最大应力；

（ii）在规定温度 T 和恒定拉力负荷下，试样在匀速（稳态）蠕变阶段的蠕变速度 v 不超过某一规定值的最大应力。

当以第一种方法来表示蠕变极限时，用带有三个指数（一个在上，两个在下）的符号 $\sigma^{T}_{\delta/t}$ 表示。例如 $\sigma^{700}_{0.2/100}$ 即表示工作温度700 ℃、经 100 h 后蠕变伸长

率（总伸长率或塑性伸长率）为0.2%时的蠕变极限。

当以第二种方法来表示蠕变极限时，用带有两个指数（一个在上，一个在下）的符号 σ_v^T 表示。例如 $\sigma_{1\times10^{-5}}^{600}$ 即表示工作温度600 ℃、蠕变速度为 $1\times10^{-5}\%/h$ 的蠕变极限。

此外，对于长时高温下工作的构件，还必须保证工作期间不会因蠕变而发生断裂。在指定温度 T 和规定工作期间 t 内，使材料因蠕变而不发生断裂的最大应力称为持久强度极限。它是衡量材料抵抗蠕变断裂能力的性能指标，用带有两个指数（一个在上，一个在下）的符号 σ_t^T 表示。例如，$\sigma_{10^5}^{500}$ 即表示工作温度500 ℃、经历10万小时不发生断裂的持久强度极限。

对在高温下长期承受静载的构件进行安全计算时，视设备对各构件蠕变变形限制量的具体要求，一般应使工作应力小于相应的蠕变极限。此外，还应按材料的持久强度极限进行校核，以保证构件不发生断裂。为了使设备工作安全可靠，在上述计算中，也与常温构件的强度计算一样，需要考虑适当的安全因数。

3. 应力松弛

在规定温度及初始变形或位移恒定的条件下，材料中的应力随时间而逐渐减小的现象称为应力松弛。应力松弛是由于在初始变形恒定的限制下，材料的蠕变以初始变形中弹性变形部分不断转变为塑性变形的方式进行，从而使应力逐渐减小。例如，连接高温蒸气管道的螺栓（图10－4a），拧紧后产生伸长变形 Δl，由于螺栓的工作长度 $l+\Delta l$（等于两法蓝端板的厚度）在工作过程中是不变的，所以螺栓的伸长变形 Δl 保持不变，如图10－4b所示。若螺栓初始拧紧时的应力为 σ_0，初始变形 $\Delta l=ob$ 中弹性变形为 ab，塑性变形为 oa，则经时间 t 后，在初始变形 Δl 恒定的限制下，因螺栓蠕变，使其中弹性变形量减小了 ac，而塑性变形量增加了 ac，于是螺栓的应力将由 σ_0 降低到 σ_{th}，出现应力松弛。

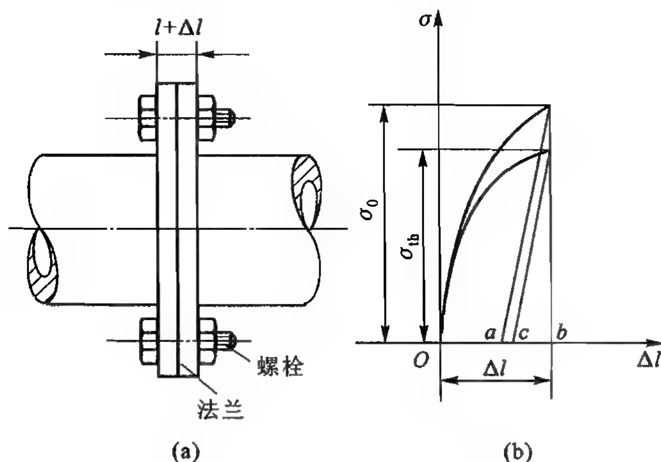


图10－4

螺栓应力的减小，使连接的紧密程度降低，以致可能造成管道漏气。所以为了防止漏气，螺栓经一定工作时间后，必须进一步拧紧。

为了衡量材料抵抗应力松弛的能力，可在指定温度 T 和保持试样初始变形 Δl 不变的条件下，测量试样中的剩余应力 σ_{th} 随时间 t 增加而减小的变化情况，并画出图 10－5 所示的应力松弛曲线。图中 σ_0 为初始应力、σ_{th} 为经时间 t 后试样中的剩余应力，对不同材料在同样试验温度和初始应力下，经过相同的时间，如果剩余应力越高，则表明该材料的抗应力松弛性能越好。

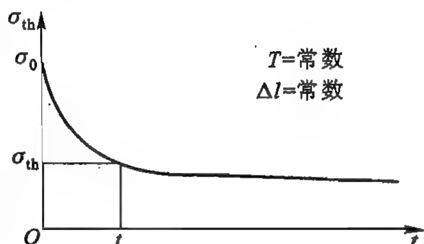


图 10－5

§10－2 冲击吸收功

1. 概述

试验指出，当加载速度很慢时，金属材料的力学性能是稳定的，载荷速度对其无显著影响，这时可作为静载处理。但是，当加载速度较快时就不是这样。一般说来，材料在急加载荷作用下，由于塑性变形的速度跟不上应力增加的速度，因此随着加载速度的增加，其力学性能变化的总趋势是：强度指标（σ_b、σ_s 等）升高，塑性指标 δ、ψ 则有所下降，材料的脆性增加了。

工程实际中的许多设备，例如采掘、锻压等机械都承受加载速度很快的冲击载荷，就是一般工作比较平稳的机械，在起动、刹车和超载等情况下，冲击载荷也是很难避免的。因为冲击载荷的加载速度很大，材料的脆性破坏倾向显著增加，特别是在冲击载荷作用下材料又处于低温、或具有引起应力集中的各种因素时，脆性破坏的危险性就更大。由此可见，评定上述情况下各种材料脆性破坏的倾向是十分必要的。

2. 冲击吸收功

为了评定材料在冲击载荷下脆性破坏的倾向，在工程实际中广泛采用一次摆锤冲击弯曲试验，测定标准试样在一次冲击载荷作用下折断时试样所吸收的冲击功，作为衡量材料抵抗冲击断裂能力的性能指标。其测试原理如图 10－6 所示。试验时，先将标准试样 1 支放在机座 2 的两支点 3 之间（如图 10－6b 所示），再将重为 F 的摆锤 4 绕轴 O 提到某一高度 h_1，使摆锤具有位能 Fh_1，然后令摆锤自由下落将试样沿缺口处冲断，摆锤在消耗了一部分位能后转向另一侧较低的高度 h_2，此时剩余的位能为 Fh_2。如不计其他能量的损失，则冲断试样所吸收的冲击功即为摆锤冲击前后两高度位能之差 $Fh_1 - Fh_2$，其单位为焦耳(J)。

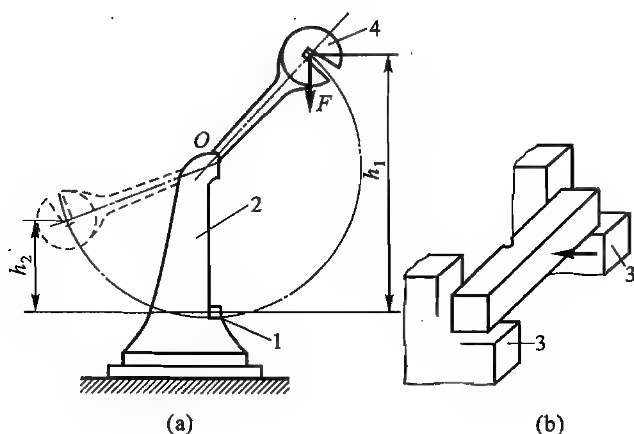


图 10-6

我国《金属夏比缺口冲击试验方法》(GB/T 229—1994)规定的夏比U型缺口标准冲击试样尺寸如图10-7a所示,测得的冲击吸收功以A_{ku2}(2 mm深U型缺口)或A_{ku5}(5 mm深U型缺口)表示。图10-7b是试样在机座上的安放位置(试样缺口处于受拉的一侧),以及支座和摆锤刀口的主要尺寸。试样之所以要开缺口,是为了使缺口根部的材料在受冲击时处于三向受拉的应力状态,从而令该处的材料更易于呈脆性断裂。为了反映材料有更尖锐缺口时的脆性转化倾向,可采用带有V型缺口的夏比试样(图10-8)进行冲击试验。用该试样测得的冲击吸收功以符号A_{kv}表示。

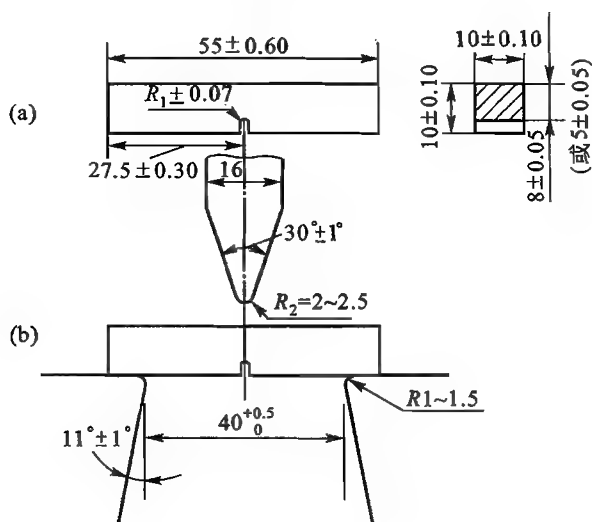


图 10-7

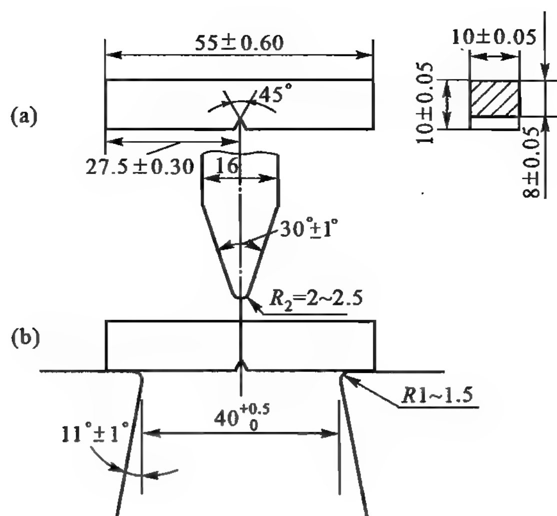


图 10－8

材料的冲击吸收功值除决定于材质外，与试样的尺寸、形状、温度以及加载速度等有很大关系。试样尺寸增大或缺口尖锐程度增加，都将使冲击吸收功值显著降低。

对于碳钢和某些合金钢等金属，当温度降低到 0 ℃以下（或少许高于 0 ℃）时，冲击吸收功将急剧下降，材料变得很脆，出现所谓冷脆现象。这一材料由韧变脆的临界温度称为韧脆转变温度。它是鉴定材料低温力学性能的一个指标。在其他条件相同的情况下，材料的韧脆转变温度愈低，表明其抵抗低温冲断的性能愈好。韧脆转变温度使用标准 *V* 型缺口试样测定，一般材料由韧显著变脆是经一个温度范围的（图 10－9）。此时，可按各种不同规定确定韧脆转变温度。例如，取冲击吸收功——温度曲线上、下平台区间某规定百分数（n）所对应的温度作为韧脆转变温度（用 ETT_n 表示）。也可取脆性断面率－温度曲线中某规定脆性断面率（n）所对应的温度作为韧脆转变温度（用 $FATT_n$ 表示）。

加载速度对冲击吸收功的影响因材料不同而异。一般加载速度增高，将使材料的韧脆转变温度增高。

3. 冲击吸收功的应用

由于冲击吸收功值不仅与材质有关，而且随试样的形状、尺寸不同而显著改变。因此，由标准试样测得的冲击吸收功值不能直接换算到实际构件上去。它并不能完全反映材料本身的性能而用于设计计算，只能作为比较材料抵抗冲击能力的一个参考性指标。在选用承受冲击载荷的材料时，一般都根据长期使用经验，规定在不同情况下材料所允许的最低冲击吸收功值。例如《钢制压力容器》（GB 150—1998）规定，低于 20 ℃温度工作的钢制压力容器材料，夏比 V 型

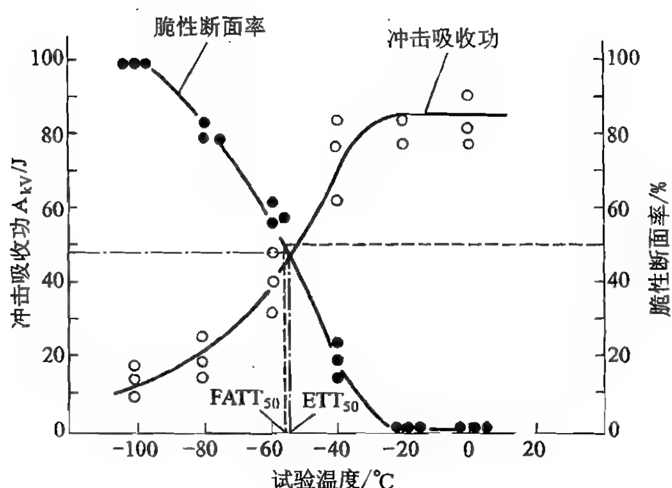


图 10－9

缺口试样的冲击吸收功 A_{kv}分别要满足≥18 J(σ_b≤450 MPa 的钢材),或≥20 J(σ_b=450～515 MPa 的钢材)及≥27 J(σ_b=515～655 MPa 的钢材)。同时还需注意,冲击吸收功值是由一次冲断试样测得的,而有些构件却是在多次冲击下工作。试验指出:多次冲击后的断裂是各次冲击损伤积累的结果,如多次重复冲击载荷的能量不大时,材料抵抗断裂的能力主要仍取决于强度,在这种情况下,选用冲击吸收功值高的材料并无多大意义。因此冲击吸收功值只适用于评定承受一次冲击、或较大能量多次冲击材料的抗断能力。

此外,由于冲击试验简单方便,对材料品质、内部缺陷、脆性转化趋势和工艺质量方面,都较其他试验方法更为敏感,能显示材料内部组织结构的微小差异,因此冲击试验广泛用于检验材料的品质和控制热处理工艺质量等方面。

冲击试验还用于测定材料脆性转折温度,这对评定野外露天低温工作的钻探设备、桥梁以及其他低温工作的设备用钢是十分必要的。

§10－3 交变应力下材料的疲劳极限

在工程实际中,除了静载荷和冲击载荷外,还常遇到随时间而作周期性改变的载荷,称为交变载荷。例如,一对齿轮的轮齿在互相啮合过程中(图 10－10),其所受载荷从开始的零值变到最大,然后又从最大变到脱离啮合时的零值。齿轮每转一周,轮齿就这样受力一次。又如,当空气压缩机的活塞往复方向都压缩空气时(图 10－11),其活塞杆就受到拉、压交替变化的载荷。由于交变载荷的作用,轮齿或活塞杆内的应力也随时间而作周期性变化。这种随时间而作周期

性改变的应力就称为**交变应力**。也有些构件，如图 10－12a 中的车轴虽然所受载荷 F 并不随时间变化，但由于轴的转动，轴内任一点 A（除圆心外）至中性轴 z 的垂直距离 y 是变化的（图 10－12b），因而该点的弯曲正应力 $\sigma=\dfrac{M_z y}{I_z}$ 的大小、方向也随时间而作周期改变，这也是在交变应力作用下工作的构件。

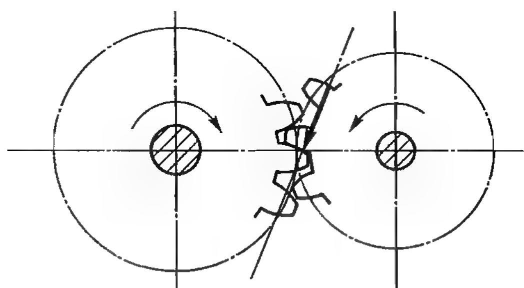


图 10－10

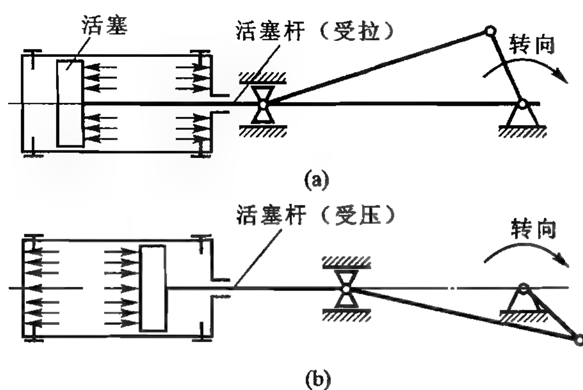


图 10－11

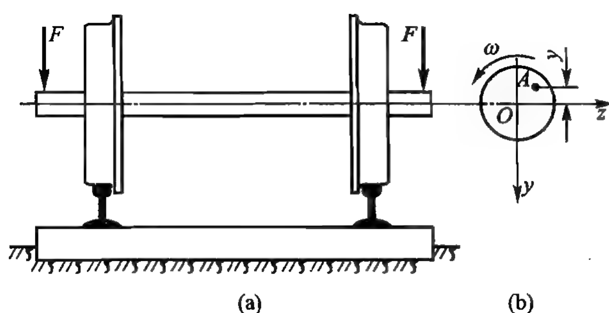


图 10－12

在交变应力作用下，构件的破坏形式与静应力作用时不同，材料抵抗断裂的极限应力也显著下降。本节将介绍材料在交变应力下的破坏特点、材料抵抗断裂的极限应力和影响极限应力的主要因素。由于材料抵抗断裂的极限应力与交变应力的变化情况有关，所以下面首先介绍交变应力的类型。

1. 交变应力的类型及其应力比

为了表示交变应力的变化规律，可以将应力 σ 随时间 t 的变化情况画成曲线。图 10－13 所示为某一交变应力的变化曲线，从图中可以看出：随着时间的变化，应力在一固定的最小值 σ_{min} 和最大值 σ_{max} 之间作周期性的交替变化。应力每重复变化一次的过程称为一个应力循环。

应力循环中最小应力 σ_{min} 与最大应力 σ_{max} 之比，可用来表示交变应力的变化的特点，称为交变应力的应力比（或循环特征），并以符号 r 表示，即

$$r=\frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} \tag{10-1}$$

最大应力与最小应力的平均值称为平均应力，以 σ_m 表示。而最大应力与最小应力之差的一半称为应力幅，以 σ_a 表示。

工程实际中常遇到的特殊交变应力有两种类型：

（1）对称循环交变应力　当 $\sigma_{max}=-\sigma_{min}$，即 $r=-1$ 的交变应力称为对称循环交变应力。例如车轴的弯曲正应力即为对称循环的交变应力（图 10－14）。

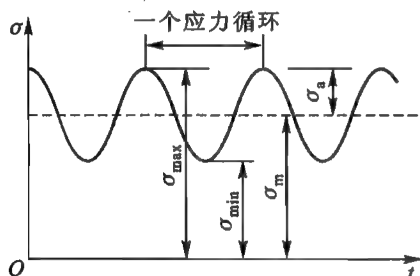


图 10－13

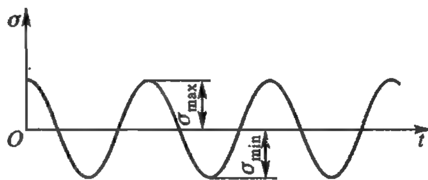


图 10－14

（2）脉动循环交变应力　当 $\sigma_{min}=0$、$\sigma_{max}>0$（或 $\sigma_{max}=0$、$\sigma_{min}<0$），即 $r=0$（或 $r=-\infty$）的交变应力称为脉动循环交变应力。例如，图 10－10 所示齿根处的弯曲正应力就属于此类交变应力（图 10－15）。

除了上述特殊类型的交变应力外，在工程实际中也常遇到一般非对称循环的交变应力（$r\neq-1$），如图 10－13 所示。例如在重物作用下已弯曲的梁又有振动时，其横截面上的弯曲正应力就属于这种情况。

有些构件也可能在交变切应力下工作，像螺旋弹簧，初轧机的万向接轴等。此时，上述交变应力的有关概念也同样适用，只要将正应力 σ 换为切应力 τ 就

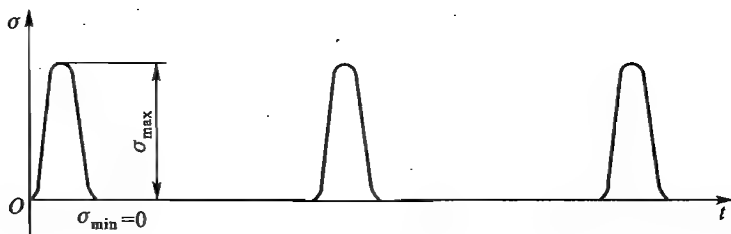


图 10－15

可以了。

上面所讨论的交变应力，其应力循环中的最大值和最小值均为一固定值，这一类应力统称为稳定的交变应力。但某些构件，如采掘机械、破碎机械中的一些构件，其交变应力的最大值和最小值，并不保持固定。这类交变应力称为不稳定的交变应力。在不稳定的交变应力中，如最大应力和最小应力的变动不大，也可近似地作为稳定交变应力来处理。本节只限于讨论稳定交变应力的问题。

2. 材料在交变应力作用下的破坏特点，疲劳极限

与在静应力作用下的破坏相比，金属材料在交变应力作用下的破坏具有以下特点：

① 抵抗断裂的极限应力低。材料破坏时的应力值通常要比材料的强度极限（σ_b、τ_b 等）低得多，甚至低于屈服极限（σ_s、$\sigma_{0.2}$、τ_s 等）。

② 破坏有一个过程。构件需经若干次应力循环后才突然断裂。

③ 材料的破坏呈脆性断裂。即使是塑性材料，断裂时也无明显塑性变形。并且断口表面一般都存在两个不同的区域：光滑区和粗糙区。图 10－16 为车轴在交变应力作用下断裂的断口示意图，由图中可明显地看到光滑和粗糙的两个区域。

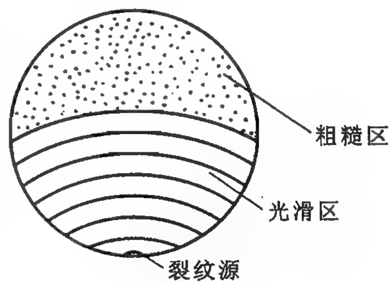


图 10－16

经大量观察发现，在交变应力作用下，材料破坏的整个过程经历了裂纹形成、裂纹扩展直到最后断裂三个阶段。当应力循环中的最大应力值超过一定限度时，经过一定的应力循环次数后，首先在应力最大的地方（常发生在应力集中处）或材质薄弱处，开始形成极细微的裂纹，然后随着应力循环次数继续增加，裂纹逐渐扩展，在裂纹扩展的过程中，由于应力的交替变化，使裂纹两边的表面时而张开，时而压紧，因而彼此摩擦和挤压，逐渐形成了光滑区；当裂纹不断扩展到使构件不

能承受所加的载荷时，构件就突然断裂，这部分断口即为粗糙区。上述材料在交变应力（或应变）作用下，在一处或几处产生局部永久性累计损伤，经一定循环次数后产生裂纹和裂纹的扩展以至突然断裂的过程称为疲劳。

在疲劳破坏之前，由于构件并无明显的变形，裂纹的形成又不易及时发现，所以疲劳破坏表现为突然发生，很容易造成事故。在发生损坏的机械零件中，疲劳破坏占相当大的比例。因此，研究材料抵抗疲劳破坏的性能是十分重要的。

为了确定材料在交变应力作用下所能承受的极限应力，就需对试样施加各种交变应力，进行拉伸（压缩）、弯曲和扭转等疲劳试验。其中最常进行的是回转弯曲疲劳试验。其试验原理如图 10 - 17a 所示，将标准试样 1 固定在空心轴夹具 2 内，使两者成为一个整体，通过砝码 3 对其施加载荷，于是试样在工作长度内为纯弯曲（图 10 - 17b）。当电动机 4 经软轴 5 带动空心轴夹具与样件一起旋转时，试样将承受对称循环的交变弯曲应力。在试样横截面边缘处，应力循环的最大应力值可由所加的载荷按弯曲正应力公式 $\sigma_{max}=\dfrac{M_{max}}{W}$ 算出；试样断裂前的应力循环次数即为试样的转数，其数值可由转数计数器 6 读出。

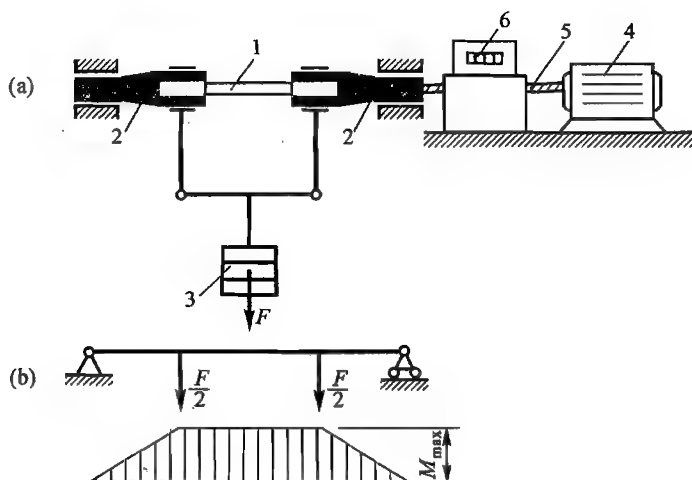


图 10 - 17

将若干根尺寸、材质相同的标准试样，依次降低弯曲载荷，逐根进行疲劳试验，结果发现：试样承受应力循环中的最大应力值越低，使试样疲劳断裂所需要的应力循环次数也就越多。对于钢、铸铁等材料，当应力循环中的最大应力值低于某一极限值时，则试样经无限多次应力循环也不断裂，这一极限值就称为材料

的疲劳极限。

通过回转弯曲疲劳试验，得出低碳钢等试样最大弯曲正应力 σ_{max} 与断裂前所需应力循环次数 N 的关系曲线称为 $s-N$ 曲线，如图 10－18a 所示（通常横坐标取为 $\lg N$ 较方便）。图中曲线水平部分所对应的应力值 σ_{-1} 即为该材料的弯曲对称循环疲劳极限。

对于硬铝、镁合金等某些有色金属，以及一些超高强钢等，即使应力循环的最大应力值很低，经一定应力循环次数后也会断裂，而无真正的疲劳极限（图 10－18b）。因此，对于这一类材料，常根据构件使用寿命的要求，取在某一规定应力循环次数 N_0 下材料所能承受的最大应力值作为条件疲劳极限。一般有色金属取 $N_0=10^8$。

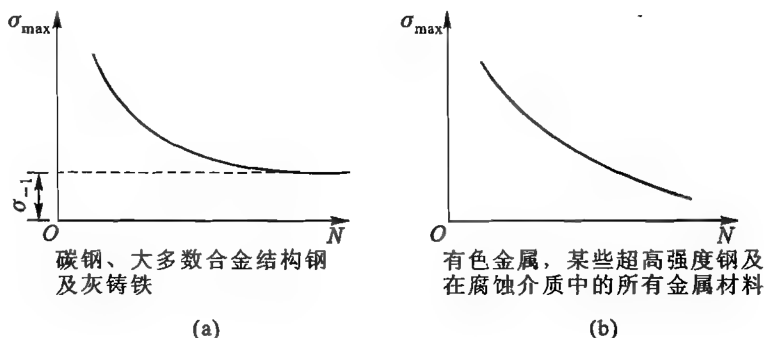


图 10－18

材料的疲劳极限不仅与材质有关，而且与交变应力的应力比 r，试样的变形形式（拉伸、压缩、弯曲、扭转等）有关。在非对称循环交变应力作用下材料的疲劳极限，可对试样采取不同的加载方式，使其承受某一特定的应力比，通过上述类似的试验方法来测定。试验表明，对于同一材料，以对称循环的疲劳极限为最低，而拉压对称循环的疲劳极限一般又比弯曲对称循环时的疲劳极限低。通常用 σ_r、τ_r 表示在交变正应力和交变切应力作用下材料的疲劳极限，脚标 r 表示相应的应力比。例如 σ_{-1} 表示对称循环交变正应力作用下材料的疲劳极限；而脉动循环交变切应力作用下的疲劳极限则表示为 τ_0。

从大量试验数据得出，钢在弯曲对称循环时的疲劳极限与抗拉强度 σ_b 之间有如下的近似关系：

$$\sigma_{-1}=(0.4\sim0.6)\sigma_b$$

各种材料的疲劳极限可由有关的手册中查得，表 10－1 列出了几种材料的对称循环疲劳极限。

表 10-1 几种材料的对称循环疲劳极限*

材料	σ_{-1}(拉压)/MPa	σ_{-1}(弯曲)/MPa	τ_{-1}(扭转)/MPa
Q235	120~160	170~220	100~130
45	190~250	250~340	150~200
Q345	200	320	

* 表中所引为正火钢的数据。

3. 影响疲劳极限的主要因素

手册中所给出的材料的疲劳极限,都是根据小直径($d=7\sim10$ mm)的标准光滑试样得到的。疲劳试验结果指出,除材质外,构件的外形、表面光洁度、尺寸以及工作环境(工作介质、温度等)等因素对疲劳极限的高低都有影响。因此将材料的疲劳极限用于具体构件的强度计算时,必须考虑这些影响。下面介绍影响疲劳极限的几个主要因素:

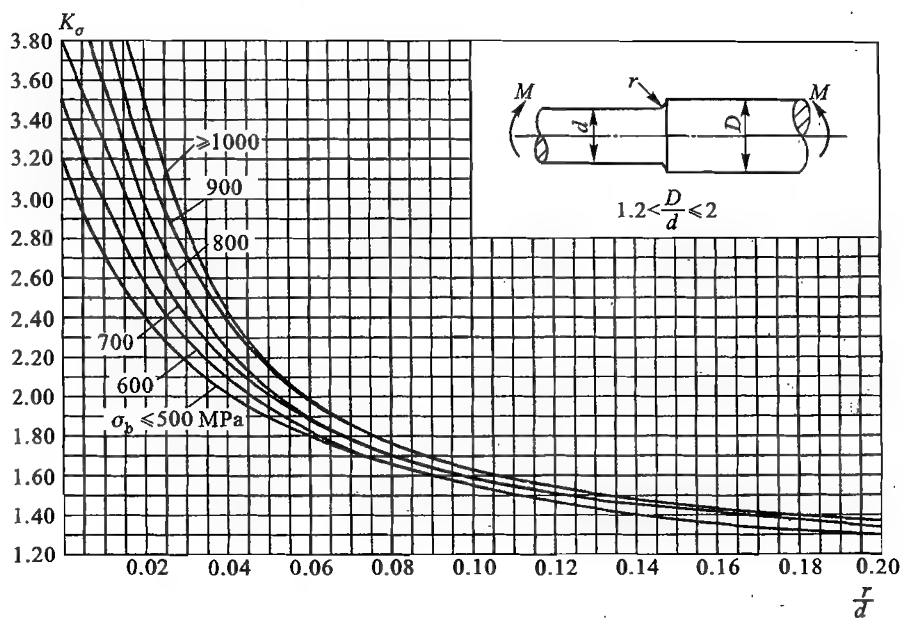
(1) 应力集中的影响

由于实用上的需要,机器上的构件常需钻孔、开槽或切制螺纹等,因此在这些截面急剧改变的地方就会产生应力集中。在静应力作用下,对于塑性材料,由于塑性变形能使应力集中现象缓和,一般不会明显地影响构件的强度。但是在交变应力作用下,由于疲劳裂纹首先在应力最大的地方形成,因此在应力集中处容易产生裂纹,从而使疲劳极限降低。应力集中现象愈严重,疲劳极限也就愈低。通常用**有效应力集中因数** K_σ 或 K_τ(σ 表示正应力、τ 表示切应力)表示应力集中对疲劳极限的影响程度,即

$$\text{有效应力集中因数 } K_\sigma(\text{或 } K_\tau) = \frac{\text{光滑试样的疲劳极限}}{\text{具有应力集中的试样的疲劳极限}}$$

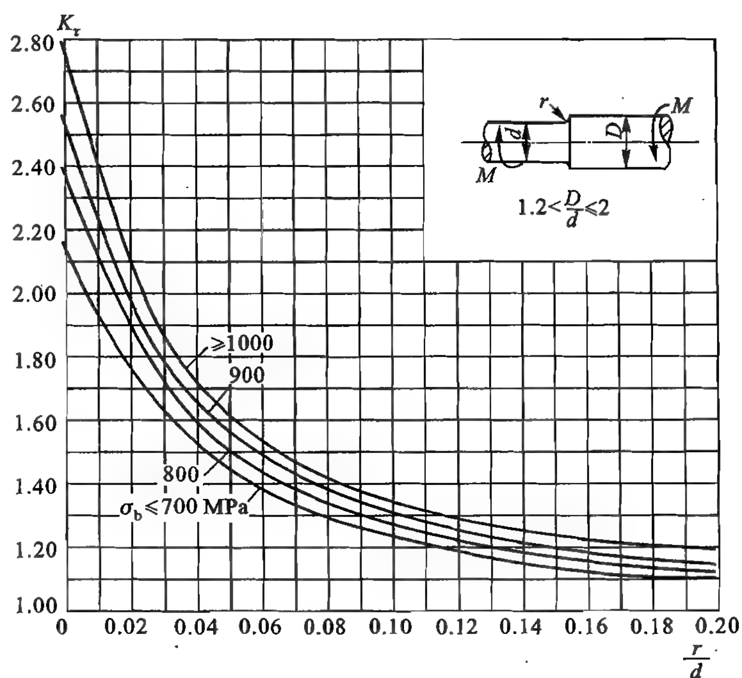
K_σ 和 K_τ 是一个大于1的数值,由试验测定。一些常见应力集中情况的有效应力集中因数已制成图表,可以从有关的手册中查到,图 10-19、图 10-20 分别为钢制阶梯轴在弯曲、扭转对称循环时的有效应力集中因数曲线。它们适用于 $1.2<\frac{D}{d}\leqslant 2$ 的情况,对于 σ_b 在 500(或 700)~1 000 MPa 之间的钢材,可由该图按内插法计算。

由图可知,随着过渡圆角半径 r 的减小,应力集中现象愈严重时,有效应力集中因数就愈大。在图 10-19 中,当 $\frac{r}{d}<0.04$ 时,K_σ 达到 2 至 2.5,也就是说疲劳极限降低了 1/2~3/5。由此可见,设计构件时,为了提高构件的疲劳极限,



K_σ
3.80
3.60
3.40
3.20
3.00
2.80
2.60
2.40
2.20
2.00
1.80
1.60
1.40
1.20
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14
0.16
0.18
0.20
$\frac{r}{d}$
≥1000
900
800
700
600
$\sigma_b \leqslant 500$ MPa
M
r
d
D
M
$1.2<\frac{D}{d}\leqslant 2$

图 10－19



K_τ
2.80
2.60
2.40
2.20
2.00
1.80
1.60
1.40
1.20
1.00
0
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14
0.16
0.18
0.20
$\frac{r}{d}$
≥1000
900
800
$\sigma_b \leqslant 700$ MPa
r
M
d
D
M
$1.2<\frac{D}{d}\leqslant 2$

图 10－20

尽量减小各种应力集中的程度是一重要途径，例如增大构件变截面处的过渡圆角半径等。

必须注意，有效应力集中因数与§1-8节所提到的理论应力集中因数是不同的，前者是指构件在无应力集中与有应力集中情况下疲劳极限之比，其数值与构件的形状和材质有关。而后者系指静载荷下有应力集中的构件其最大局部应力与按无应力集中而计算出的应力之比，其数值只取决于构件的形状。

(2) 构件尺寸大小的影响

试验表明，虽然材料相同但尺寸大小不同的试样，其疲劳极限也不相同。大尺寸试样的疲劳极限要比小尺寸试样的疲劳极限为低。这主要是由于尺寸越大，试样内部所包含的杂质、缺陷就会增多，因此疲劳裂纹就愈容易产生。尺寸增大使疲劳极限降低的程度，可以用尺寸因数来表示，即

$$\text{尺寸因数}\ \varepsilon_\sigma(\text{或}\ \varepsilon_\tau)=\frac{\text{大尺寸光滑试样的疲劳极限}}{\text{标准小尺寸光滑试样的疲劳极限}}$$

ε_σ 或 ε_τ 是一个小于1的数值，某些材料的尺寸因数试验值可以从有关的手册中查到，图10-21为钢材在弯曲和扭转对称循环时尺寸因数 ε_σ、ε_τ 的变化曲线。对于 σ_b 在500~1 200 MPa之间的钢材，其 ε_σ 可由该图按内插法求得。

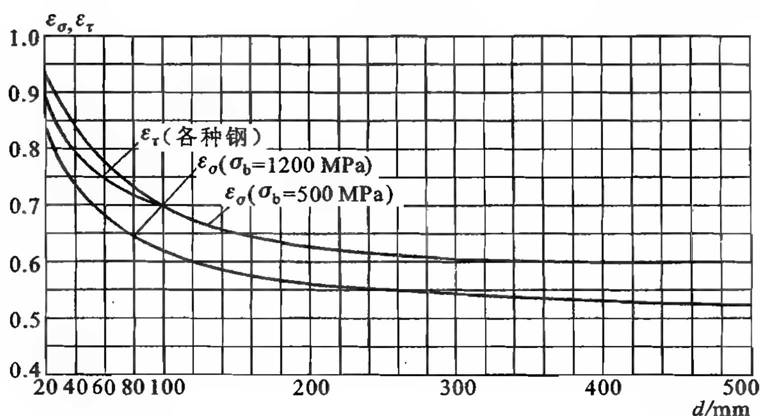


图 10-21

(3) 表面加工质量的影响

因为构件表面上的刀纹、伤痕等都会引起应力集中，所以随着表面加工光洁度的降低，疲劳极限也要降低，降低的程度可用表面质量因数表示，即

$$\text{表面质量因数}\ \beta=\frac{\text{在各种加工情况下试样的疲劳极限}}{\text{试样表面经磨光后的疲劳极限}}$$

图10-22给出了钢的表面质量因数与抗拉强度 σ_b 之间的关系曲线。由图

可知，表面质量因数随 σ_b 的增大而降低。当 $\sigma_b > 1\ 100$ MPa 时，试样表面经磨光和未经加工情况下的疲劳极限竟相差 1 倍以上。因此对承受交变应力的构件，提高表面光洁度和严禁碰伤可提高其疲劳极限，这对高强度钢尤为显著。

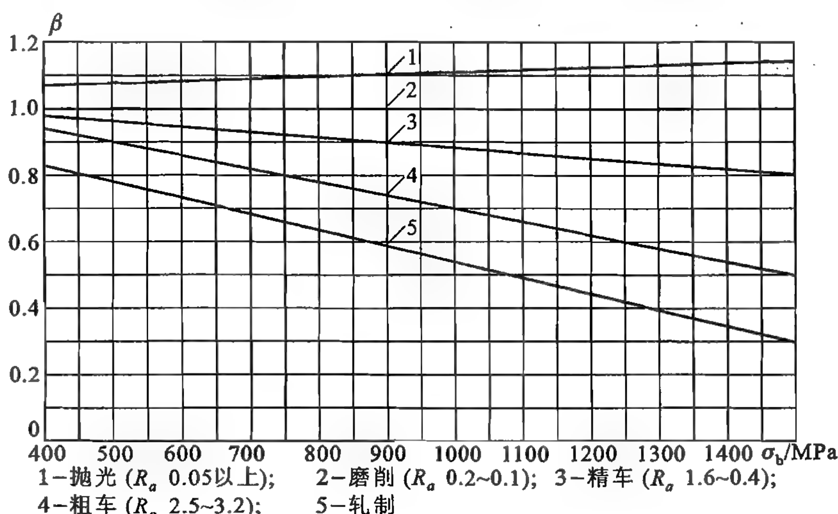


图 10－22

(4) 工作环境的影响

在腐蚀环境中的构件，由于腐蚀介质的侵蚀能促使疲劳裂纹的形成和扩展，因此，材料的疲劳极限一般都明显降低。例如，σ_b 为 40 MPa 的钢材，在海水中的弯曲对称循环疲劳极限比在干燥空气中的数值约低 1/2。

当钢的工作温度在 300～400 ℃以下时，温度对疲劳极限的影响不大，超过 400 ℃以后，随着温度的升高疲劳极限也会下降。

这些都是工作环境对疲劳极限的影响。

在通常工作条件下，考虑到上述前三种影响疲劳极限的因素，构件在对称循环时的疲劳极限应为：

对于弯曲和拉压 $$(\sigma_{-1})_{构件} = \frac{\varepsilon_\sigma \beta}{K_\sigma}\sigma_{-1} \qquad (10-2)$$

对于扭转 $$(\tau_{-1})_{构件} = \frac{\varepsilon_\tau \beta}{K_\tau}\tau_{-1} \qquad (10-3)$$

得到构件的疲劳极限后，再考虑适当的安全因数，即可计算构件的疲劳强度。

例 10－1 一车轴的一段如图 10－23 所示，已知该轴的材料为 45 钢，$\sigma_b = 600$ MPa，弯曲对称循环疲劳极限 $\sigma_{-1} = 275$ MPa，表面光洁度为 $R_a 1.6$。试按该段轴截面变化处的情况，计算构件的疲劳极限 $(\sigma_{-1})_{构件}$。

解：

（1）确定有关因数　有效应力集中因数 K_σ：根据 $\frac{D}{d}=\frac{50\ \text{mm}}{40\ \text{mm}}=1.25$，$\frac{r}{d}=\frac{2\ \text{mm}}{40\ \text{mm}}=0.05$，$\sigma_b=600$ MPa，由图 10－19 查得 $K_\sigma=1.95$。

尺寸因数 ε_σ：由图 10－21 查得，当 $d=40$ mm 时，对于 $\sigma_b=500$ MPa 的钢材，$\varepsilon_\sigma=0.84$；对于 $\sigma_b=1200$ MPa 的钢材，$\varepsilon_\sigma=0.73$。因此，对于 $\sigma_b=600$ MPa 的车轴，ε_σ 可按内插法求得，即

$$\varepsilon_\sigma = 0.73+\frac{(1\ 200-600)\ \text{MPa}}{(1\ 200-500)\ \text{MPa}}(0.84-0.73)=0.82$$

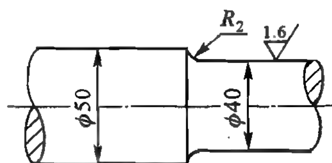


图 10－23

表面质量因数 β：根据轴 $\phi40$ 段的表面光洁度为 $R_a1.6$ 和 $\sigma_b=600$ MPa，由图 10－22 查得 $\beta=0.94$。

（2）计算疲劳极限　将 $\sigma_{-1}=275$ MPa 和查得的 K_σ、ε_σ、β 值代入式（10－2），即得

$$(\sigma_{-1})_{\text{构件}}=\frac{\varepsilon_\sigma\beta}{K_\sigma}\sigma_{-1}=\frac{0.82\times0.94}{1.95}\times275\ \text{MPa}=109\ \text{MPa}$$

以上疲劳极限仅是按车轴的一个变截面处的情况计算的，除此之外，在车轴其他有应力集中处，还需进行计算。

关于非对称循环时材料疲劳极限的确定和构件的疲劳强度计算，在机械零件等课程中另有阐述。

4. 热疲劳的概念

在§1－7 中曾经指出，构件因冷热不均将会产生温度应力。如果构件的冷热不均现象是随时间而作周期性变化的，那么因此而引起的温度应力也是交变应力。所以，在此交变应力作用下，经若干次应力循环后，构件有可能出现疲劳裂纹，甚至断裂。构件因交变温度应力所引起的裂纹或断裂过程就称为**热疲劳**。在冶金、动力等设备中某些构件的破坏，像锅炉中一些管道和平炉加料机挑杆的开裂、热轧机轧辊所出现的网状裂纹等都与热疲劳有关。

§10－4 断裂韧度

1. 概述

前面介绍的材料的各种力学性能指标，如屈服极限、强度极限、疲劳极限等，都是由光滑试样测得的。但是在工程实际中，构件常不可避免地存在某些宏观裂纹或缺陷（0.1 mm 以上），象材料在冶炼过程中产生的夹杂、缩孔，在加工过程中产生的焊裂、刀痕，以及在使用过程中逐渐形成的疲劳裂纹或应力腐蚀裂纹等。大量的事实表明：宏观裂纹的存在使材料脆性破坏的倾向增加，在某些情况下会发生低应力脆断。例如，高强度钢的构件，或中、低强度钢的大型构件，尽管工作应力低于屈服极限或疲劳极限（在交变应力作用下），材料也具有足够的延

伸率和冲击吸收功，但往往却发生脆性断裂。通过对断口的分析发现，断裂总是从裂纹尖端起始经过进一步的扩展而形成的。

显然，在上述情况下，如果不考虑裂纹，仍按前述材料力学的传统方法，依据光滑试样测得的强度指标（如 σ_s、σ_{-1} 等）进行强度计算是不能保证构件安全的。所以近几十年来，随着大型构件和高强钢的日益发展，人们开始对材料有裂纹时的强度性能和裂纹扩展规律进行了大量研究，形成一个新的力学分支——断裂力学。与材料力学不同，断裂力学考虑了宏观裂纹的存在，通过对含裂纹试样的断裂试验和裂纹尖端区的应力分析，得到了一个反映材料抵抗裂纹扩展能力的性能指标，称为断裂韧度。

为了介绍断裂韧度及其应用，下面首先介绍应力强度因子的概念。

2. 裂纹尖端应力强度因子

由于脆断起始于裂纹尖端，因此裂纹能否扩展，一定与裂纹尖端区的应力有关。图 10－24a 所示为一无限大的平板，两端受均匀拉应力 σ 的作用，在板中央有一长度为 $2a$ 的穿透裂纹，拉应力与裂纹垂直，于是裂纹上、下面沿裂纹垂直方向张开，并沿原裂纹面前方扩展。我们把属于这种扩展形式的裂纹称为张开型裂纹或Ⅰ型裂纹。这类裂纹是最常遇到的，也最容易扩展而至断裂，因此对它的研究最多。

现分析裂纹尖端附近各点的应力。取直角坐标 Oxy 平行板面，令裂纹尖端 O 为坐标原点，x 轴沿裂纹方向（图 10－24a）。因为 σ 沿板厚均匀分布，如板较薄，则可认为板内各点的应力沿板厚不变，并处于平面应力状态。如果从裂纹尖端区任一点 A 取出一单元体，则其上的应力分量只有 σ_x、σ_y 和 τ_x、τ_y（$=\tau_x$），如图 10－24b 所示。如 A 点位置以极坐标 r、θ 表示，在材料的应力应变关系成正比的条件下，按弹性力学的方法，可以求得裂纹尖端区（在 $r << a$ 的范围内）任一点 A 处各应力分量的表达式为：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)\\ \sigma_y &= \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)\\ \tau_x &= \tau_y = \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\end{aligned}\right\} \qquad (10-4)$$

式中：$K_{\mathrm{I}}=\sigma\sqrt{\pi a}$。

从上式可以看出，各应力分量都包含有极坐标 r、θ 的函数和一个共同的因子 K_{I}。其中极坐标 r、θ 的函数表示各点应力的分布规律；而因子 $K_{\mathrm{I}}=\sigma\sqrt{\pi a}$ 则与坐标 r、θ 无关，只是所受应力 σ 和裂纹尺寸 a 的函数，它决定了各点应力的大

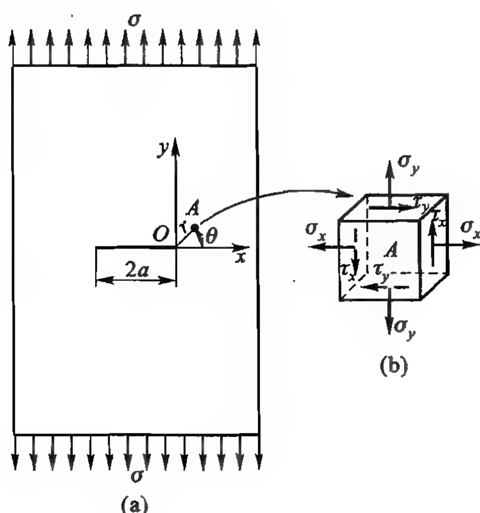


图 10－24

小。当 K_{I} 增大时，裂纹尖端区各点的应力都将随之增加，因此 K_{I} 是反映裂纹尖端区应力强弱程度的一个物理量，称为**应力强度因子**。符号 K 下的脚标“I”表示是“I”型裂纹的应力强度因子。在上例中，由 $K_{\mathrm{I}}=\sigma\sqrt{\pi a}$ 可以得出应力强度因子的单位为 $\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-\frac{3}{2}}$。

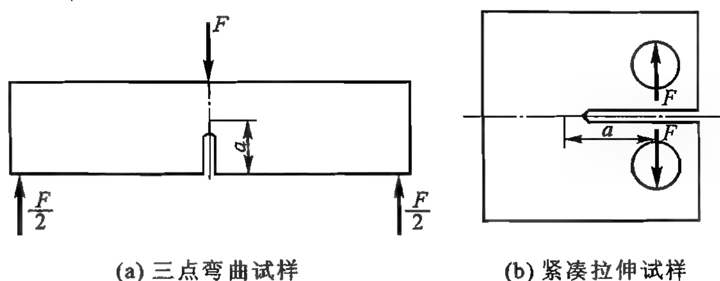
与图 10－24 所示的例子相似，对其他各种 I 型裂纹，如具有单边穿透裂纹的弯曲平板（图 10－25a）或拉伸平板（图 10－25b）等，通过理论或试验分析，也都可以得出各自的应力强度因子。构件与裂纹的构形（形状、尺寸和裂纹位置）和受载情况不同，相应的应力强度因子计算式也各不相同。它们可以从有关的书籍或手册中查到。

必须注意，应力强度因子是在材料服从胡克定律的条件下得出的。但由式（10－4）可知，当 r 趋于零时，各应力分量趋于无穷大，这在实际上是不可能的。事实上，当应力值达材料的屈服极限时就要发生塑性变形，因此裂纹尖端总会产生或大或小的塑性区。理论和试验证明，只要塑性区非常小（例如比裂纹尺寸小一个数量级以上），应力强度因子就能近似地表示裂纹尖端区的应力强度。

3. 材料的断裂韧度

（1）断裂韧度的概念

试验指出，随构件载荷不断加大（或裂纹尺寸增大），当应力强度因子增大到某一极限值 K_c 时，裂纹就会快速扩展而脆断。应力强度因子的这个临界值 K_c 就称为材料的**断裂韧度**。K_c 值越高，说明材料越不易脆断，因此断裂韧度 K_c 是衡量材料抵抗裂纹快速扩展能力的性能指标。



(a) 三点弯曲试样　　(b) 紧凑拉伸试样

图 10－25

断裂韧度 K_c 与构件厚度 B 的关系如图 12－26 所示，当板超过一定厚度，K_c 即与厚度无关并达到最小值 K_{Ic}。这是由于板比较厚，板内各点沿板厚方向的变形几乎受到完全的阻碍，沿该方向的应变 ε_z 可认为等于零，各点的应变均发生在平行于板的平面内，这种情况称为平面应变状态。因此它与薄板的平面应力状态（图 10－24b）不同，根据广义胡克定律，此时 $\varepsilon_z=\sigma_z-\mu(\sigma_x+\sigma_y)=0$，在裂纹尖端区任一点 A 所取的单元体上，还作用有沿板厚方向的拉应力 $\sigma_z=\mu(\sigma_x+\sigma_y)$，即单元体处于三向拉伸应力状态（图 10－27）。由于材料在三向受拉应力状态下很易于脆性断裂，所以厚板的断裂韧度值最小。这一最小值 K_{Ic} 就称为平面应变断裂韧度。它与载荷和构件的几何尺寸无关，是一个完全取决于材质的力学性能指标。

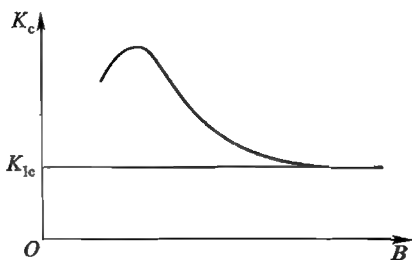


图 10－26

（2）平面应变断裂韧度的测试原理

测试材料的平面应变断裂韧度常采用图 10－25 所示的两种试样和受载方式。试样的裂纹是先用电火花线切割等方法加工一条狭缝，然后再施加交变应力使裂纹进一步扩展而制成，以此模仿最尖锐的真实裂纹。试样的应力强度因子计算式可由理论分析得出；通过逐渐增大载荷，可以测得裂纹迅速扩展的临界载荷值。将此临界载荷值和裂纹尺寸代入应力强度因子计算式，即可求得材料的平面应变断裂韧度 K_{Ic}。

测试时必须注意：

① 对试样尺寸要有一定要求，以保证断裂前裂纹尖端只有小范围屈服，因为这是应力强度因子存在的前提。同时，为了测得平面应变断裂韧度，也要求试样具有一定的厚度。

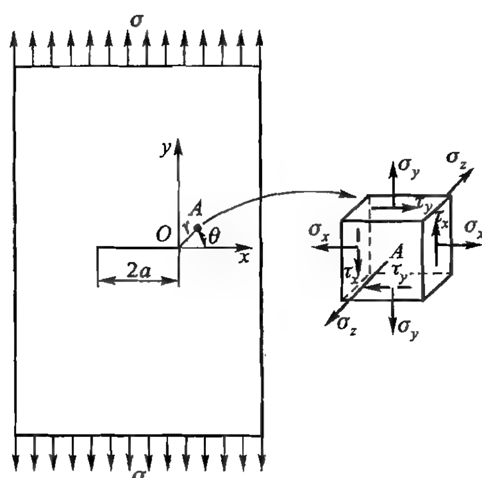


图 10－27

② 必须根据有关国标《金属材料平面应变断裂韧度 K_{Ic}试验方法》（GB 4161—1984），按一定的规定，合理地确定裂纹开始迅速扩展的临界载荷值。

一些材料的平面应变断裂韧度值如表 10－2 所示。

（3）外界因素对 K_{Ic}的影响

与材料的其他力学性能一样，在不同的外界条件下（温度、加载速度、工作介质等），材料的断裂韧度 K_{Ic}也不相同。

表 10－2　某些材料的平面应变断裂韧度（常温静载）

材　料	化学成分	冶炼和热处理工艺	σ_s 或 $\sigma_{0.2}$ /MPa	K_{Ic} /$(MN \cdot m^{-3/2})$
45	C 0.49　Si 0.17　Mn 0.63　P 0.23　S 0.021	煅后余热淬火，水冷 2～2.5 min 后，再 55 ℃回火 2 h		96.7
40CrNiMoA	C 0.42　Mn 0.64　Si 0.26　Cr 0.78　Ni 1.59　Mo 0.19　S 0.005　P 0.023	电炉冶炼 860 ℃ ×60～80 min 正火空冷 + 850℃ ×80～100 min 淬火油冷 + 560℃ ×120～140 min 回火水冷	1 080	142.6～153.5

续表

材　料	化学成分	冶炼和热处理工艺	σ_s 或 $\sigma_{0.2}$ /MPa	K_{Ic} /$(MN \cdot m^{-3/2})$
40SiMnMoV	C　Si　Mn 0.40　0.40　1.0 Mo　V 1.6　0.35	电炉冶炼 930℃ 淬火 + 560℃ + 580℃ 回火	1 650	66.3 ~ 67.3
球墨铸铁①	Si　Mn　Mg 2.39　0.91　0.045 Re　S　P 0.032　0.01　0.03	880℃ × 30 min + 280℃ × 60 min 等温处理		40.3 ~ 42.8

① σ_b = 1 500 MPa(150kgf/mm²)

对于碳钢和某些合金钢等，随温度降低，断裂韧度 K_{Ic} 减小，并且在低温时存在一由韧显著变脆的转折温度。当低于转折温度时，材料处于冷脆状态，一般中、低强度结构钢的 K_{Ic} 值下降到 31 ~ 62 MN · $m^{-3/2}$。

加载速度对 K_{Ic} 的影响因材料而异。对于一般中强度钢，随着加载速度的增加断裂韧度先是减小，当降到某一最低值后，如加载速度进一步增加，则因形变产生的热来不及散失，材料的断裂韧度又逐渐增大，如图 10 - 28 所示。图中的 K_{Id} 表示动载作用下的断裂韧度。至于高强度钢，加载速度对断裂韧度的影响则比较小。

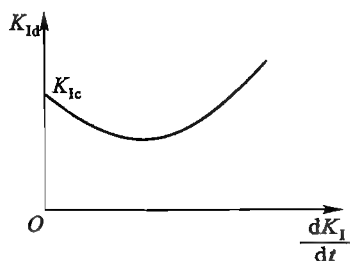


图 10 - 28

金属在应力和腐蚀介质共同作用下，即使裂纹尖端初始的应力强度因子低于材料的 K_{Ic} 值(在空气中测得)，裂纹也会缓慢扩展直到断裂。但是试验指出，就一定材料而言，当裂纹初始的应力强度因子降低到某一个临界值 K_{ISCC} 以下时，裂纹就不会缓慢扩展。这个临界值 K_{ISCC} 就称为**应力腐蚀界限强度因子**。其物理意义即是材料在应力腐蚀条件下的断裂韧度，当然它要比在空气中测得的断裂韧度值低。

4. 断裂韧度的应用

(1) 合理选择材料和工艺

从前面的讨论可以看出，构件不仅可能因超载发生破坏，而且也可能因裂纹而引起脆断。衡量材料抵抗超载破坏能力的性能指标是屈服极限(σ_s、$\sigma_{0.2}$)或强度极限(σ_b)等；而衡量材料抵抗裂纹快速扩展能力的性能指标是断裂韧度

K_{Ic}。因此在选择材料,确立热处理或焊接工艺,以及研制新材料时,就不能只着眼于强度指标 σ_s、σ_b,而且要考虑断裂韧度 K_{Ic}。然而对于中碳合金结构钢等某些材料,其强度和断裂韧度通常是矛盾的,一般随 σ_s 的增高,K_{Ic}下降,这就需要我们辨证地处理好强度和断裂韧度的矛盾。

例 10-2 一承受内压的圆筒薄壁容器(图 10-29),已知工作应力 $\sigma = 1\,200$ MPa,沿容器纵向焊缝热影响区存在未穿透的表面裂纹,裂纹深 $a = 1.5$ mm,裂纹尖端应力强度因子按 $K_I = 1.5\sigma\sqrt{a}$计算,试在如下两种钢中进行选材:

A 钢 $\sigma_s = 1\,800$ MPa;$K_{Ic} = 62$ MN · m$^{-3/2}$

B 钢 $\sigma_s = 1\,320$ MPa;$K_{Ic} = 93$ MN · m$^{-3/2}$

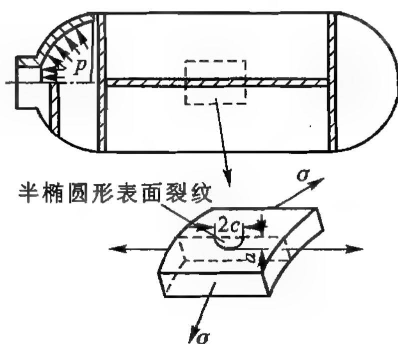


图 10-29

解:

(1) 考虑容器超载的安全性两钢种的超载安全因数为:

A 钢 $$n_s = \frac{1\,800}{1\,200} = 1.5$$

B 钢 $$n_s = \frac{1\,320}{1\,200} = 1.1$$

计算结果说明两钢种的强度均够,但从传统的强度观点选材,还是选 A 钢比 B 钢有利,因其超载安全因数大,有较大的强度储备。

(2) 考虑容器抗脆断能力 容器裂纹尖端的应力强度因子 $K_I = 1.5\sigma\sqrt{a} = 1.5 \times 1\,200 \times 10^6\ \text{N/m}^2\ \sqrt{0.001\,5}\ \text{m}^{1/2} = 69.7\ \text{MN} \cdot \text{m}^{-3/2}$

如选 A 钢,n_s 虽高,但 $K_I > K_{Ic} = 62$ MN · m$^{-3/2}$要发生脆断;如选 B 钢,虽然 n_s 较低,但 $K_I < K_{Ic} = 93$ MN · m$^{-3/2}$,不致发生脆断。所以应选用 B 钢。

上例说明,对于强度高、韧度低的钢,脆断是矛盾的主要方面,此时应适当降低超载安全因数,选择强度较低而韧度较高的钢种;反之,对于强度低、韧度高的钢,则选材时适当提高超载安全因数是合理的,并且在保证强度的条件下,还可适当降低断裂韧度,以铸代锻,以铁代钢。

(2) 用于含裂纹构件的安全计算或使用寿命估算

因含裂纹构件发生脆断的条件(也称**脆断判据**)是

$$K_I = K_{Ic} \tag{10-5}$$

而应力强度因子又是构件工作应力与裂纹尺寸的函数,所以可由脆断判据计算构件发生脆断的临界应力或临界裂纹尺寸。

例 10-3 一两端受拉的厚平板(图 10-27),中央具有穿透裂纹,裂纹与受拉方向垂直,因裂纹尺寸 $2a$ 与板宽相比甚小,可视为无限大的平板,应力强度因子计算式为 $K_I = \sigma\sqrt{\pi a}$,板材的断裂韧度 $K_{Ic} = 45$ MN · m$^{-3/2}$。试求:

(1) 当裂纹尺寸 $a = 20$ mm 时,使平板发生脆断的临界拉应力 σ_c;

(2) 当工作应力 $\sigma = 150$ MPa 时,平板发生脆断的临界裂纹尺寸 a_c。

解：

(1) 计算临界应力　将 $K_{\mathrm{I}}=\sigma\sqrt{\pi a}$代入式(10－5)，可得

$$\sigma_{c}=\frac{K_{\mathrm{Ic}}}{\sqrt{\pi a}}=\frac{45\ \mathrm{MN}\cdot\mathrm{m}^{-3/2}}{\sqrt{(3.14\times0.02)\mathrm{m}}}\approx180\ \mathrm{MPa}$$

(2) 计算临界裂纹尺寸　将 $K_{\mathrm{I}}=\sigma\sqrt{\pi a}$代入式(10－5)，解得

$$a_{c}=\frac{K_{\mathrm{Ic}}^{2}}{\sigma^{2}\pi}=\frac{45^{2}(\mathrm{MN/m^{\frac{3}{2}}})^{2}}{150^{2}\times3.14(\mathrm{MN/m^{2}})^{2}}=0.0286\ \mathrm{m}=28.6\ \mathrm{mm}$$

在静应力 σ 作用下，如果构件中的裂纹尺寸 a 小于临界值 a_c，裂纹是不会扩展的。但是在交变应力作用下，即使应力循环中的最大应力值与静应力 σ 相等，只要应力循环中应力强度因子的变化幅度 $\Delta K=K_{max}-K_{min}$大于某下限值，裂纹就会缓慢扩展，当其到达临界尺寸时，裂纹就将快速扩展而脆断。试验得出，对于一般金属材料，裂纹缓慢扩展的速度$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}N}$与应力强度因子的变化幅度 ΔK(N为应力循环次数)有以下关系：

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}N}=c(\Delta K)^{n}\qquad(10-6)$$

式中 c、n 为与材料性能有关的常数，可由试验测得。因此如果知道了裂纹的初始尺寸 a_0 和临界尺寸 a_c，则可按式(10－6)积分求得构件能承受交变应力的循环次数 N，即构件的使用寿命。

最后说明一下脆断判据[式(10－5)]的适用条件和在什么情况下会发生因裂纹引起脆断的问题。正像前面所指出的，应力强度因子只是在裂纹尖端区发生小范围屈服时才有意义。因此判据 $K_{\mathrm{I}}=K_{\mathrm{Ic}}$也只有在这个前提条件下才能使用。容易理解，在一定载荷作用下，屈服极限 σ_s 越高，断裂韧度 K_{Ic}就越低，裂纹尖端的屈服区也就越小；此外，屈服区的大小是相对于裂纹尺寸 a 而言的，当屈服区大小一定时，裂纹尺寸越大，屈服区相对来说就越小。所以判据 $K_{\mathrm{I}}=K_{\mathrm{Ic}}$一般适用于断裂韧度低、屈服极限高的高强度钢，或含有大裂纹尺寸的中、低强度钢大型构件。对于一般尺寸的中、低强度钢构件，当其处于低温、动载情况时，由于断裂韧度下降，判据 $K_{\mathrm{I}}=K_{\mathrm{Ic}}$也可能适用。判据 $K_{\mathrm{I}}=K_{\mathrm{Ic}}$所预测的断裂，其特点是：断裂应力远低于屈服极限 σ_s(一般≤$0.5\sigma_s$，但有时也可达 $0.9\sigma_s$)，裂纹扩展速度快，也就是说，断据 $K_{\mathrm{I}}=K_{\mathrm{Ic}}$所预测的断裂是低应力脆断。

对于裂纹不太大的中、低强度钢，或裂纹尺寸很小的高强度钢，在某些情况下也可能因裂纹引起所谓半脆性断裂。其断裂特点是：断裂应力比较接近屈服极限 σ_s；裂纹尖端在大范围屈服的情况下，裂纹先是缓慢扩展，当其到达某临界尺寸后则快速扩展，从而发生半脆性断裂。例如，在焊接结构拐角和压力容器接管处裂纹尖端产生高度应力集中时，或是裂纹尖端存在高残余应力的一些构件，

会发生半脆性断裂。此时因裂纹尖端区出现大范围屈服，判据 $K_1=K_{1c}$ 已不适用，需应用其他判据，这方面的内容可参考有关弹塑性断裂力学的文献。

对于工程实际中的大量中、小型构件，多采用 $\sigma_s=200\sim500$ MPa 的中、低强钢，其断裂韧度较高（$100\sim300$ MN·m$^{-3/2}$），而工作应力一般较低 $\left(\sigma=\dfrac{\sigma_s}{3}\sim\dfrac{\sigma_s}{2}\right)$，因此用断裂判据算出的裂纹临界尺寸较大。例如中心穿透裂纹受均匀拉伸的平板（图 10－27），当 $\sigma_s=500$ MPa、$K_{1c}=150$ MN·m$^{-3/2}$ 时若工作应力 $\sigma=\dfrac{\sigma_s}{2}$，则算得裂纹临界尺寸 $a_c=\dfrac{K_{1c}^2}{\pi\left(\dfrac{\sigma_s}{2}\right)^2}=\dfrac{(150\ \text{MN/m}^{3/2})^2}{\pi\left(\dfrac{500}{2}\text{MN/m}^2\right)^2}\approx0.115$ m，像这样大的裂纹尺寸往往超过构件的断面尺寸，因此这一类构件主要为超载破坏，亦即强度是矛盾的主要方面。所以对工程实际中大量应用的中、低强度钢的中、小尺寸构件，用前面材料力学的强度计算方法就可保证构件的安全。

§10－5 硬度

1. 硬度的概念

硬度是材料力学性能中的又一个常用指标，依据应用的目的和不同情况，硬度有多种不同的度量方法，因而硬度的含义和单位也各不相同。在工程实际中应用最多的是压痕法，它是以一定的载荷，将具有特殊形状的较硬的物体（称压头）压入被测材料的表面，使材料表面产生局部塑性变形而形成压痕，压痕的深度或表面积的不同即表示材料的软硬程度不同。因此用压痕法测定的硬度实质上是表示材料表面在一个小的体积范围内抵抗塑性变形的能力。由于材料对塑性变形的抗力与强度指标 $\sigma_{0.2}$、σ_b 等和塑性指标 δ、ψ 等有关。因此，压痕法硬度是材料的强度、塑性等的一个综合性能指标。

硬度试验操作简便迅速，不破坏试件、适用范围广，而且硬度值与抗拉强度等某些性能指标有一定的关系，所以硬度试验广泛用于估计材料的强度、检验材质、热处理工艺以及研究材料金相组织的力学性能等许多方面。下面介绍两种使用最多的压痕法硬度（布氏硬度和洛氏硬度）试验。

2. 布氏硬度

布氏硬度的试验原理如图 10－30 所示。在规定压力 F 的作用下，将一定直径 D 的硬质合金球体压入试样表面（图 10－30a），经保持规定时间后卸除压力，使试样表面压出一个球面压痕（图 10－30b）。由于材料愈硬，压痕就愈小，并且压痕大小是随规定压力 F 值的增加而增大的，因此就用试样压痕球面面积 $A=\pi Dh$ 所承受的平均压力表示材料的硬度值，称为**布氏硬度**，并用符号 HBW 表

示，即

$$HBW = 0.102 \frac{F}{\frac{\pi D}{2}\left(D - \sqrt{D^2 - d^2}\right)} = 0.102 \frac{F}{D^2}\left[\frac{2}{\pi\left(1 - \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}\right)}\right] \quad (10-7)$$

式中：F——试验压力，N；

D——球体直径，mm；

d——压痕平均直径，mm。

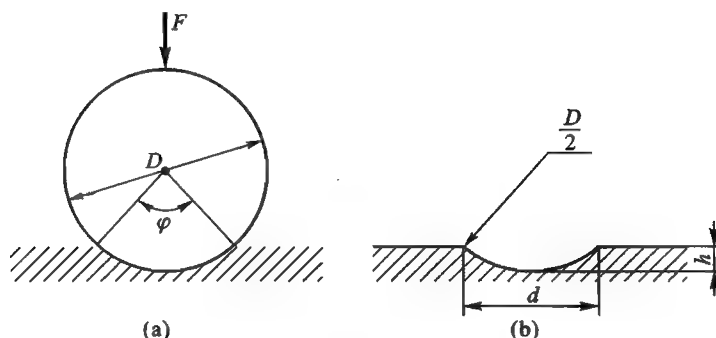


图 10－30

必须注意，硬度值（一般不标出单位）不仅与材质有关，而且与试验压力 F、钢球直径和保荷时间等有关。因此，根据材料和预计的硬度值范围不同，其所取的数值在国标《金属布氏硬度试验　第 1 部分：试验方法》（GB/T 231.1—2002）中都作了具体规定，并要求在试验结果中加以如下标记法。即符号 HBW 之前为硬度值，符号后面用三个以斜线相隔的数值，顺序表示采用的压球直径、压力及保荷时间（10～15 s 不标注）。例如 600HBW1/30/20 表示材料的布氏硬度值 600 是用直径 1 mm 的硬质合金球，在 294.2 N（30 kgf）压力作用下保持 20 s 的试验条件下测得的。

根据压痕几何相似条件（压入角 φ 相同），对于同一材料，只有在 $\frac{F}{D^2}$ = 常数的条件下，选用不同的载荷 F 和球径 D 所测得的硬度值才能相同，而对不同材料所测得的硬度值方可进行比较。

硬度值也与试验温度、加载速度有关。对多数纯金属而言，一般是随着温度的升高，HBW 下降（某些材料可在一定温度下达最大值，而后随温度增高而下降）。冲击动力硬度一般比静力硬度高。

分析大量的试验数据得出：对于某些金属材料，常温静载下测得的布氏硬度

值 HBW 与抗拉强度 σ_b 之间存在一定的关系。其换算值可参考 GB/T 1172—1999(黑色金属)、GB 3771—1983(铜合金)等有关资料。

布式硬度试验的优点是:精度高,数据较稳定;与 σ_b 有一定关系;因压痕较大,能反映材料较大体积内的综合平均性能。但此法操作较慢,且只能测试 650 HBW 以下硬度值的材料,当材料的硬度更高时,应改用洛氏硬度或其他硬度试验。

3. 洛氏硬度

洛氏硬度是在初始压力 F_0 及初始压力 F_0 再加主压力 F_1 的先后作用下,将压头(金刚石圆锥或钢球)压入试样表面,经规定保持时间后卸除主压力 F_1,用测量因主压力 F_1 引起的残余压痕深度 h 计算硬度的一种压痕硬度试验(图 10 - 31)。洛氏硬度用 HR 符号表示,并按下式计算硬度值:

$$\text{洛氏硬度} = N - \frac{h}{s} \tag{10-8}$$

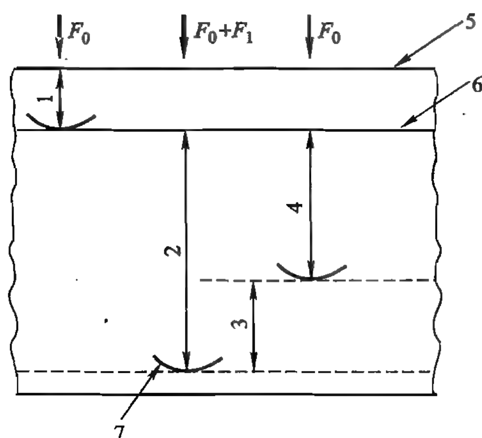


图 10 - 31

1——在初试验力 F_0 下的压入深度;

2——由主试验力 F_1 引起的压入深度;

3——卸除主试验力 F_1 后的弹性回复深度;

4——残余压入深度 h;

5——试样表面;

6——测量基准面;

7——压头位置

上式中引入常数 N 的目的是为了使压陷深度 h 越小,算得的硬度值越大,以便与材料越硬硬度越高的习惯概念一致。在我国《金属洛氏硬度试验 第 1

部分:试验方法》(GB/T 230.1—2004)中,对普通洛氏硬度测试:取初压力 $F_0 = 98.07\ N$, h 的给定标尺单位为 $s = 0.002\ mm$,给定标尺的硬度数 $N = 100$(圆锥压头)及 $N = 130$(圆球压头);对表面洛氏硬度测试:取初压力 $F_0 = 29.42\ N$, h 的给定标尺单位 $s = 0.001\ mm$,给定标尺的硬度数 $N = 100$。后者因所取初压力和总压力小,主要用于测量极薄工件及各种表面处理层(渗碳、渗氮层等)的硬度。

为了测定不同硬度和硬度层的材料,国标按几种不同的总压力及圆锥或圆球压头的搭配组成 9 种洛氏硬度标尺和 6 种表面洛氏硬度标尺。每种标尺的硬度在 HR 后加一个字母 A、B、C……(洛氏硬度),或加两个数字(表示总压力公斤数)及一个字母表示(表面洛氏硬度)。当使用钢球或硬质合金球标尺时,上述硬度符号后再分别加字母“S”或“W”。例如 40HR30TS 表示采用钢球压头,在 294.2 N(30 kgf)总压力作用下测得的表面洛氏硬度为 40。

在实际中最常使用的洛氏硬度标尺有 HRA、HRB、HRC 及表面洛氏硬度标尺 HR15N、HR30N、HR45N 等。用金刚石圆锥压头的标尺 A、C、D、N 测定硬质材料;薄板或薄的硬质层材料用表面洛氏硬度标尺。

洛氏硬度与布氏硬度的测量方法不同,所测数值不能直接比较。两者数值间的对照关系及与 σ_b 的换算值可参考 GB/T 1172—1999(黑色金属)、GB 3771—1983(铜合金)等有关资料。

洛氏硬度试验操作迅速简便,适用于大量成品的检验。由于洛氏硬度有多种标尺,能测量各种软硬不同的材料,而且压痕也较布氏硬度法的压痕小,所以得到广泛的使用。洛氏硬度的主要缺点是:各种硬度级别之间不能比较;由于压痕小,对于粗晶粒材料(灰铸铁、轴承合金等),试验结果往往不相一致。

§10-6 提高和改善材料力学性能的途径

从前面的介绍可知,不同材料具有不同的力学性能;而同一材料在不同工作条件下所表现的力学性能也不一样。各种材料在力学性能上所以有这些差别,根本原因还是由材料的化学成分和微观组织结构所决定的。

为了更加合理地选择和利用材料,本节首先介绍材料的化学成分、微观组织结构与力学性能之间的关系,然后在此基础上指出提高和改善材料力学性能的途径。

1. 材料的化学成分和微观组织结构与力学性能的关系

(1) 化学成分对力学性能的影响

钢是含碳量小于 2% 的铁碳合金,其中含碳量的多少对钢的力学性能有很大的影响。从图 10-32 可以明显地看出,对于正火状态的碳钢,随钢中含碳量

的增加，抗拉强度 σ_b、布氏硬度 HBW 上升，而塑性 δ、ψ 和冲击韧度 α_k[①] 下降；但其中在含碳量大于 1% 时，σ_b 随含碳量的增加却不断减小。

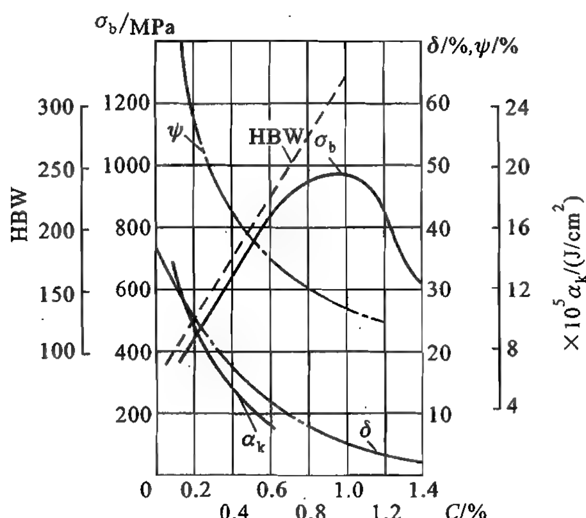


图 10－32

在碳钢中，除碳元素外，还含有硅、锰、硫、磷等不可去除的杂质和残存元素，它们对钢的力学性能虽然有时也起到一些有益作用，但多数产生不利影响。所以在优质碳素钢中，对它们的含量有一定的限制。

在合金钢中，所加入的合金元素如硅、锰、镍、铬、钼、钨、钒等，一般都能使钢的强度（σ_b、σ_s 等）和硬度增高，且具有一定的塑性、韧度，即使钢具有较好的综合力学性能。此外钢中加入某些合金元素，还能使材料具有某些特殊性能。例如加入钨、钼、钒等可以提高材料的高温强度；加入锰、镍等可以提高材料在低温时的韧度。

（2）微观组织结构对力学性能的影响

在固态下，所有金属都是由许多大小、形状不一的微小晶粒组成的，而每个晶粒又是由许多按一定规则排列的原子所组成。为了表示金属原子的排列规则，可以将原子之间用直线连接起来，形成空间格子——称为晶格。在金属中，晶格的类型很多，其中最常见的有体心立方晶格和面心立方晶格。对于体心立方晶格的金属，例如 α 铁及其合金——碳钢等，其金属原子在空间的排列构成立方体网格的空间点阵，在每一个立方体的中心和各个顶角各有一个金属原子（图 10－33）。对于面心立方晶格的金属，如 γ 铁及其合金——奥氏体钢等，在

① 本节所指冲击韧度 α_k 是指标准缺口试样冲断时，断口单位横截面积所消耗的冲击吸收功。

晶格的各立方体的每一个表面中心和顶角都有一个金属原子(图 10-34)。

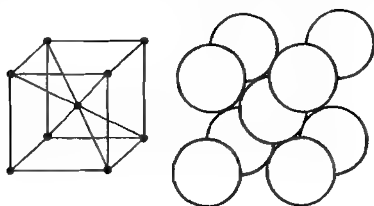


图 10-33

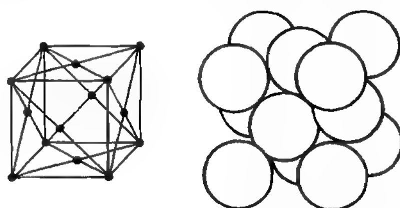


图 10-34

金属的晶格类型对材料的力学性能有显著的影响。就塑性而言,面心立方晶格的金属较体心立方晶格的金属要好,并且无低温冷脆现象,而体心立方晶格的金属则有低温冷脆现象。

除了晶体的结构之外,金属的力学性能还决定于他的显微组织(即在显微镜下观察到的金属试样的组织情况)。钢是以铁为基体的合金,由于钢中其他各元素的成分、含量、存在形式以及分布情况的不同,就形成各种不同的显微组织,从而表现出不同的力学性能。

碳和各种合金元素在钢中有两种主要的存在形式,一种形式是它的原子在固态下溶于铁的晶格之中,形成固态溶体,简称固溶体。一般固溶体都具有优良的塑性、一定的强度、硬度和较高的韧度。碳和各种合金元素在钢中的另一种存在形式是形成碳化物或其他化合物。碳化物一般都比较硬而脆。所以当钢中固溶体偏多时,其强度、硬度相对就低些,而塑性和韧度则较好;当碳化物偏多时,其强度和硬度就高些,但塑性和韧度则较差。

钢的力学性能不仅与钢中固溶体、碳化物的数量有关,而且还与它们在钢中的分布情况有关。例如碳化物呈粗大、网状和带状分布时,钢就变得硬而脆;反之,碳化物以细粒状均匀分布时,则钢的脆性减小。又如,含碳量小于 0.8% 以下的碳钢,其显微组织是铁素体(具有体心立方晶格的铁碳固溶体)和铁素体片层与碳化物 Fe_3C 片层相间排列的机械混合物。这种机械混合物(称珠光体)的片层间距越小,钢的强度、硬度越高,而塑性和韧度就越低。

晶粒的大小对材料的力学性能也有明显的影响。一般在常温下,晶粒愈细,强度愈高,塑性韧度也愈好;但在高温下,晶粒粗化一些,强度反而较高。

2. 提高和改善材料力学性能的途径

(1) 调整、控制材料的化学成分和合金元素含量

从上面的介绍可以看出,材料的化学成分及其含量是决定金属组织结构和性能的内在因素。因此,通过调整、控制材料的化学成分和合金元素含量,就可提高和改善金属的力学性能。特别是钢中加入合金元素与铁形成固溶体,能显

著强化材料，这已成为强化钢的一个重要手段。结合我国富产锰、硅、钼等资源的情况，近些年来已研制出许多不同性能的钢种，例如 16Mn 等低合金高强度钢以及 12MoVWBSiRe 热强钢等。

(2) 进行热处理

材料的微观组织结构虽然根本上取决于材料的成分、含量，但也受一定的外界因素的影响。对于钢等一些金属，在固态下，随着加热温度和冷却速度不同，金属的微观组织结构(晶格类型、组成物的分布和晶粒大小等)将发生改变。因而对于钢等某些金属，可以通过不同的加热、保温和冷却过程，提高和改善材料的力学性能。一般说来，钢经加热、保温后，随冷却速度的增大，其硬度和强度增高，而塑性和韧度降低。

按加热温度和冷却速度的不同，在生产中常用的普通热处理方法有退火、正火、淬火和回火等。图 10－35 表示对 45 号钢进行上述几种热处理的加热、保温和冷却工艺过程。表 10－3 列出了该钢种经相应的各种热处理后，所得到的各项力学性能指标。

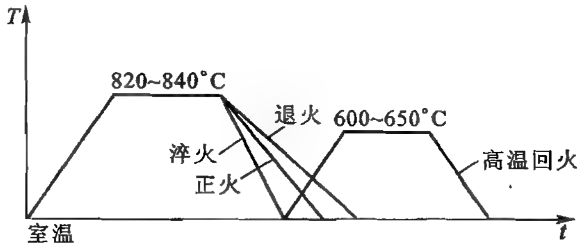


图 10－35

由表 10－3 可以看出，同一材料经不同热处理后，其力学性能有显著差别，一般钢经退火后，强度和硬度较低而塑性较好；正火钢比退火钢的强度和硬度要高些；钢经淬火处理将有很高的硬度，耐磨性好，但非常脆；淬火后的钢又经高温回火则有较高的综合力学性能(较高的强度、塑性和韧度)。

表 10－3　45 号钢几种热处理后的力学性能

热处理			机械性能			
热处理方法	加热温度 /℃	冷却方式	σ_b /MPa	HBW	δ /%	α_k /(J/m^2)
退火	820～840	炉冷	≥550	≤207	≥18	
正火	820～840	空冷	≥620	≤217	≥17	≥8×10^5
淬火＋高温回火	820～840 600～650	水冷 空冷	≥750	220～250	≥13	≥4×10^5

除了上述的普通热处理外，在生产中还采用一些特殊热处理方法，如为了增加构件表面的硬度和耐磨性，而又能保持内部有较高的强度和韧度，可以只对构件表面进行淬火，或在高温情况下向构件表面进行渗碳、渗氮和碳氮共渗（氰化）；而氮化和氰化还可提高构件的疲劳强度和耐腐蚀的能力。

3. 进行冷热变形

金属在冷压力加工时，随着材料的塑性变形，在晶粒内产生滑移的区域，晶格将发生歪扭，结果使材料对塑性变形的抗力加大。因而随着变形度的增加，材料的硬度和强度升高，塑性下降（图 10－36），这就是 §1－5 所述的加工硬化现象。加工硬化是提高金属强度的一种重要方法，这对于纯金属和不能用热处理强化的合金来说尤其重要。如在生产中广泛使用的冷拔、冷冲、冷挤压以及对构件表面滚压加工和喷丸处理等都可显著提高材料的强度、硬度和疲劳极限。

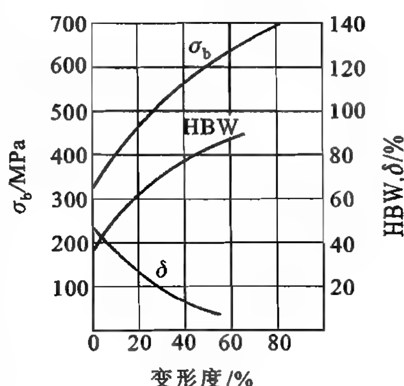


图 10－36

金属在热压力加工时，虽然也能发生加工硬化，但由于塑性变形是处于高温状态，金属的晶粒将重新成核或长大，促使加工硬化后的组织转变为新的组织；并且经压力加工后，将使材料组织更加致密、气孔等缺陷减少以及化学成分趋于均匀，这就提高和改善了材料的力学性能。例如在机械制造中，常通过锻造来改善构件的力学性能。



小　结

在 §1－5 节和本章中，介绍了材料的一些力学性能指标。这些性能指标是选择材料、评定材质或进行设计计算的重要依据。因此必须对它们有一个基本的了解，应着重掌握以下几点：

1. 要明确各项性能指标所表示的意义和作用。

就各种性能指标所表示的意义和作用来说，大致可以归纳为以下四类：

（1）强度指标　这是反映材料抵抗过量塑性变形或断裂的能力的指标，例如屈服极限、强度极限、疲劳极限、蠕变极限和持久强度极限等。在不同条件下，如果工作应力超过了这些极限应力，构件就会发生损坏（包括过量的塑性变形或断裂）。因此这些性能指标是确定许用应力值的依据，直接应用于强度计算中。

（2）刚度指标　这是反映材料抵抗弹性变形的能力的指标，如弹性模量 E、

切变模量 G 等。在涉及构件弹性变形的问题时，如刚度、静不定和稳定等问题的计算，都要用到这些性能指标。

(3) 塑性指标　属于这一类的性能指标有断后伸长率 δ 和断面收缩率 ψ 等。它们表示材料可产生塑性变形量的程度。塑性的一个重要作用是通过材料的塑性变形吸收变形功，缓和应力集中现象，从而有利于充分发挥材料的承载能力。因此，这类指标虽然不能用于设计计算，但在选材时，必须根据构件工作的具体情况予以考虑。

(4) 韧度指标　韧度是强度和塑性的综合表现，是一个能量指标。它反映材料在变形或断裂过程中所能吸收能量的能力。例如，冲击吸收功是指一次冲断带缺口试件时所吸收的能量。这个能量包括使裂纹形成、裂纹扩展直到试件断裂所需的总能量。因此冲击吸收功只部分地反映材料对裂纹扩展的抗力。它是比较材料抵抗冲击断裂能力的一个参考性指标，不能用于计算。而断裂韧度则只与裂纹扩展所吸收的能量有关（可以证明 K_{Ic} 与扩展单位裂纹表面积所吸收的能量有定量关系），K_{Ic} 越大，表示裂纹扩展单位表面面积所需要的能量越多。断裂韧度 K_{Ic} 是衡量材料抵抗裂纹快速扩展能力的性能指标，可以用于计算。

2. 要注意材料的工作条件和裂纹缺陷对力学性能的影响。

随着材料工作条件、裂纹情况的不同，材料所表现的力学性能和破坏形式也不一样。因此在强度计算中，应注意选用不同的性能指标确定许用应力。现将各种情况列表如下：

工作条件	主要破坏形式	性能指标	备　注
常温静载 短时高温静载	过量塑性变形 断裂	屈服极限 强度极限	性能指标应用相应温度下的数值
长时高温	过量塑性变形 断裂	蠕变极限 持久强度极限	性能指标的数值与工作温度、工作时间等有关
交变应力	脆断	疲劳极限	疲劳极限数值与变形形式、应力比、构件形状、尺寸和表面加工质量等有关
一次冲击或多次较大能量冲击	断裂	冲击吸收功	只能用于比较，不能用于计算
有裂纹缺陷（高强钢材料和中低强钢的大型构件）	脆断	断裂韧度	断裂韧度值与温度、加载速度和工作介质有关

3. 要辩证地对待材料的强度和韧度。

根据不同的构件和工作条件，对于材料强度和韧度的要求并不是同样的。在选择材料时，应当注意其强度和韧度的合理匹配。例如对于高强度钢或大尺寸中、低强度钢的构件，因裂纹发生脆断是矛盾的主要方面，此时保证材料具有足够的韧度是主要的，而不能片面地追求过高的强度性能指标。反之，对于中、低强度钢的中、小型构件，超载破坏是矛盾的主要方面，此时应适当提高材料的强度指标，韧度指标可作适当地降低。

4. 要了解材料成分和微观组织与力学性能的关系。材料的力学性能根本上取决于材料的化学成分和微观组织结构。了解材料化学成分和组织结构与力学性能之间的关系，有助于理解材料力学性能各种变化的原因，有助于合理选择和利用材料。合金固溶强化、热处理和冷热加工是提高和改善材料力学性能的三个主要途径。

思考题

10－1 在图 10－37 所示各情况下长期工作的钢杆中，哪些情况的钢杆将可能产生明显的蠕变或应力松弛？

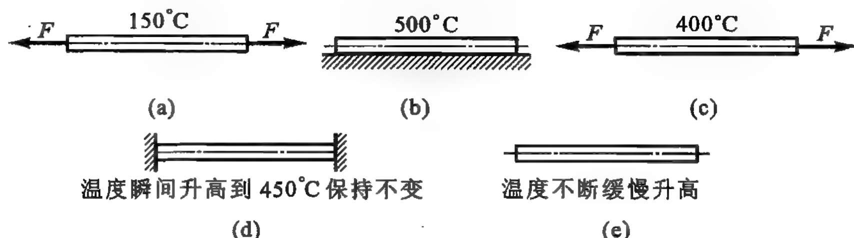


图 10－37

10－2 已知下表所列各钢种蠕变极限的数据，试比较各钢种在 500 ℃工作温度时，抵抗蠕变变形的能力是否相同？如果不同，哪个最大？哪个次之？哪个最小？

钢种	蠕变极限(MPa)
A	$\sigma^{500}_{1\times10^{-4}}=90$
B	$\sigma^{400}_{1/100}=90$
C	$\sigma^{500}_{1\times10^{-5}}=90$
D	$\sigma^{700}_{1/1000}=90$

10－3 材料的冲击吸收功这一指标有什么应用？为什么不能用于设计计算？

10－4 试述影响疲劳极限的外在和内在的主要因素，以及提高疲劳极限的主要措施。

10－5 四根轴的材质均为45号钢，其尺寸和受载情况分别如图10－38a至d所示，试分析各轴不发生弯曲破坏所能承受的最大弯曲正应力是否相同？哪个最大？哪个最小？

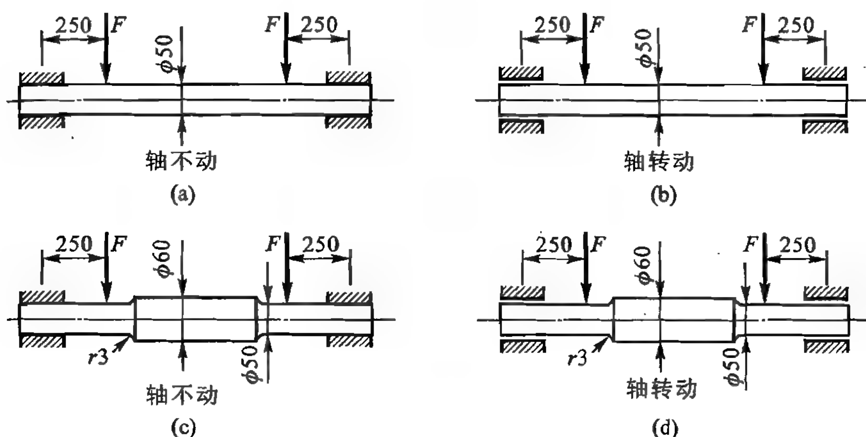


图 10－38

10－6 某冶炼厂回转窑上的大齿轮，在使用中发现一轮齿根部出现了一条裂纹，为防止该裂纹进一步扩展，在裂纹顶端钻了一个孔（图10－39），这是什么道理？

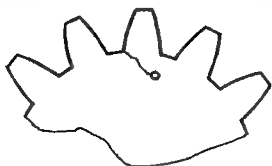


图 10－39

10－7 K_{I}、K_{c}、K_{Ic}各表示什么意义，它们之间有什么区别和联系？其数值与哪些主要因素有关？

10－8 冲击吸收功与断裂韧度K_{Ic}有什么异同？

10－9 压入法测定材料硬度的物理意义是什么？它与材料的哪些力学性能指标有关？

附录一 型 钢 表

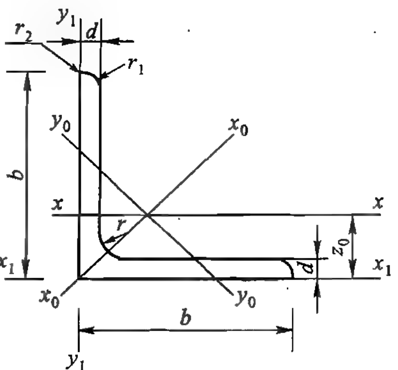


表 1 热轧等边角钢(GB 9787—1988)

符号意义：b——边宽度； I——惯性矩；

d——边厚度； i——惯性半径；

r——内圆弧半径； W——抗弯截面系数；

r_1——边端内圆弧半径； z_0——重心距离。

角钢号数	尺寸 /mm			截面面积 /cm²	理论质量 /(kg/m)	外表面积 /(m²/m)	参考数值										z_0 /cm
							$x-x$			x_0-x_0			y_0-y_0			x_1-x_1	
	b	d	r				I_x /cm⁴	i_x /cm	W_x /cm³	I_{x0} /cm⁴	i_{x0} /cm	W_{x0} /cm³	I_{y0} /cm⁴	i_{y0} /cm	W_{y0} /cm³	I_{x1} /cm⁴	
2	20	3	3.5	1.132	0.889	0.078	0.40	0.59	0.29	0.63	0.75	0.45	0.17	0.39	0.20	0.81	0.60
		4		1.459	1.145	0.077	0.50	0.58	0.36	0.78	0.73	0.55	0.22	0.38	0.24	1.09	0.64
2.5	25	3		1.432	1.124	0.098	0.82	0.76	0.46	1.29	0.95	0.73	0.34	0.49	0.33	1.57	0.73
		4		1.859	1.459	0.097	1.03	0.74	0.59	1.62	0.93	0.92	0.43	0.48	0.40	2.11	0.76

续表

角钢号数	尺寸/mm			截面面积 $/cm^2$	理论质量 /(kg/m)	外表面积 $/(m^2/m)$	参考数值										
							$x-x$			x_0-x_0			y_0-y_0			x_1-x_1	z_0 /cm
	b	d	r				I_x $/cm^4$	i_x /cm	W_x $/cm^3$	I_{x0} $/cm^4$	i_{x0} /cm	W_{x0} $/cm^3$	I_{y0} $/cm^4$	i_{y0} /cm	W_{y0} $/cm^3$	I_{x1} $/cm^4$	
3.0	30	3	4.5	1.749	1.373	0.117	1.46	0.91	0.68	2.31	1.15	1.09	0.61	0.59	0.51	2.71	0.85
		4		2.276	1.786	0.117	1.84	0.90	0.87	2.92	1.13	1.37	0.77	0.58	0.62	3.63	0.89
3.6	36	3		2.109	1.656	0.141	2.58	1.11	0.99	4.09	1.39	1.61	1.07	0.71	0.76	4.68	1.00
		4		2.756	2.163	0.141	3.29	1.09	1.28	5.22	1.38	2.05	1.37	0.70	0.93	6.25	1.04
		5		3.382	2.654	0.141	3.95	1.08	1.56	6.24	1.36	2.45	1.65	0.70	1.09	7.84	1.07
4.0	40	3	5	2.359	1.852	0.157	3.59	1.23	1.23	5.69	1.55	2.01	1.49	0.79	0.96	6.41	1.09
		4		3.086	2.422	0.157	4.60	1.22	1.60	7.29	1.54	2.58	1.91	0.79	1.19	8.56	1.13
		5		3.791	2.976	0.156	5.53	1.21	1.96	8.76	1.52	3.10	2.30	0.78	1.39	10.74	1.17
4.5	45	3		2.659	2.088	0.177	5.17	1.40	1.58	8.20	1.76	2.58	2.14	0.89	1.24	9.12	1.22
		4		3.486	2.736	0.177	6.65	1.38	2.05	10.56	1.74	3.32	2.75	0.89	1.54	12.18	1.26
		5		4.292	3.369	0.176	8.04	1.37	2.51	12.74	1.72	4.00	3.33	0.88	1.81	15.25	1.30
		6		5.076	3.985	0.176	9.33	1.36	2.95	14.76	1.70	4.64	3.89	0.88	2.06	18.36	1.33
5	50	3	5.5	2.971	2.332	0.197	7.18	1.55	1.96	11.37	1.96	3.22	2.98	1.00	1.57	12.50	1.34
		4		3.897	3.059	0.197	9.26	1.54	2.56	14.70	1.94	4.16	3.82	0.99	1.96	16.69	1.38
		5		4.803	3.770	0.196	11.21	1.53	3.13	17.79	1.92	5.03	4.64	0.98	2.31	20.90	1.42
		6		5.688	4.465	0.196	13.05	1.52	3.68	20.68	1.91	5.85	5.42	0.98	2.63	25.14	1.46

续表

角钢号数	尺寸/mm			截面面积/cm^2	理论质量/(kg/m)	外表面积/(m^2/m)	参考数值										z_0/cm
							$x-x$			x_0-x_0			y_0-y_0			x_1-x_1	
	b	d	r				I_x/cm^4	i_x/cm	W_x/cm^3	I_{x0}/cm^4	i_{x0}/cm	W_{x0}/cm^3	I_{y0}/cm^4	i_{y0}/cm	W_{y0}/cm^3	I_{x1}/cm^4	
5.6	56	3	6	3.343	2.624	0.221	10.19	1.75	2.48	16.14	2.20	4.08	4.24	1.13	2.02	17.56	1.48
		4		4.390	3.446	0.220	13.18	1.73	3.24	20.92	2.18	5.28	5.46	1.11	2.52	23.43	1.53
		5		5.415	4.251	0.220	16.02	1.72	3.97	25.42	2.17	6.42	6.61	1.10	2.98	29.33	1.57
		8		8.367	6.568	0.219	23.63	1.68	6.03	37.37	2.11	9.44	9.89	1.09	4.16	47.24	1.68
6.3	63	4	7	4.978	3.907	0.248	19.03	1.96	4.13	30.17	2.46	6.78	7.89	1.26	3.29	33.35	1.70
		5		6.143	4.822	0.248	23.17	1.94	5.08	36.77	2.45	8.25	9.57	1.25	3.90	41.73	1.74
		6		7.288	5.721	0.247	27.12	1.93	6.00	43.03	2.43	9.66	11.20	1.24	4.46	50.14	1.78
		8		9.515	7.469	0.247	34.46	1.90	7.75	54.56	2.40	12.25	14.33	1.23	5.47	67.11	1.85
		10		11.657	9.151	0.246	41.09	1.88	9.39	64.85	2.36	14.56	17.33	1.22	6.36	84.31	1.93
7	70	4	8	5.570	4.372	0.275	26.39	2.18	5.14	41.80	2.74	8.44	10.99	1.40	4.17	45.74	1.86
		5		6.875	5.397	0.275	32.21	2.16	6.32	51.08	2.73	10.32	13.34	1.39	4.95	57.21	1.91
		6		8.160	6.406	0.275	37.77	2.15	7.48	59.93	2.71	12.11	15.61	1.38	5.67	68.73	1.95
		7		9.424	7.398	0.275	43.09	2.14	8.59	68.35	2.69	13.81	17.82	1.38	6.34	80.29	1.99
		8		10.667	8.373	0.274	48.17	2.12	9.68	76.37	2.68	15.43	19.98	1.37	6.98	91.92	2.03

续表

角钢号数	尺寸 /mm			截面面积 /cm²	理论质量 /(kg/m)	外表面积 /(m²/m)	参考数值										z_0 /cm
							$x-x$			x_0-x_0			y_0-y_0			x_1-x_1	
	b	d	r				I_x /cm⁴	i_x /cm	W_x /cm³	I_{x0} /cm⁴	i_{x0} /cm	W_{x0} /cm³	I_{y0} /cm⁴	i_{y0} /cm	W_{y0} /cm³	I_{x1} /cm⁴	
7.5	75	5	9	7.412	5.818	0.295	39.97	2.33	7.32	63.30	2.92	11.94	16.63	1.50	5.77	70.56	2.04
		6		8.797	6.905	0.294	46.95	2.31	8.64	74.38	2.90	14.02	19.51	1.49	6.67	84.55	2.07
		7		10.160	7.976	0.294	53.57	2.30	9.93	84.96	2.89	16.02	22.18	1.48	7.44	98.71	2.11
		8		11.503	9.030	0.294	59.96	2.28	11.20	95.07	2.88	17.93	24.86	1.47	8.19	112.97	2.15
		10		14.126	11.089	0.293	71.98	2.26	13.64	113.92	2.84	21.48	30.05	1.46	9.56	141.71	2.22
8	80	5	9	7.912	6.211	0.315	48.79	2.48	8.34	77.33	3.13	13.67	20.25	1.60	6.66	85.36	2.15
		6		9.397	7.376	0.314	57.35	2.47	9.87	90.98	3.11	16.08	23.72	1.59	7.65	102.50	2.19
		7		10.800	8.525	0.314	65.58	2.46	11.37	104.07	3.10	18.40	27.09	1.58	8.58	119.70	2.23
		8		12.303	9.658	0.314	73.49	2.44	12.83	116.60	3.08	20.61	30.39	1.57	9.46	136.97	2.27
		10		15.126	11.874	0.313	88.43	2.42	15.64	140.09	3.04	24.76	36.77	1.56	11.08	171.74	2.35
9	90	6	10	10.637	8.350	0.354	82.77	2.79	12.61	131.26	3.51	20.63	34.28	1.80	9.95	145.87	2.44
		7		12.301	9.656	0.354	94.83	2.78	14.54	150.47	3.50	23.64	39.18	1.78	11.19	170.30	2.48
		8		13.944	10.946	0.353	106.47	2.76	16.42	168.97	3.48	26.55	43.97	1.78	12.35	194.80	2.52
		10		17.167	13.476	0.353	128.58	2.74	20.07	203.90	3.45	32.04	53.26	1.76	14.52	244.07	2.59
		12		20.306	15.940	0.352	149.22	2.71	23.57	236.21	3.41	37.12	62.22	1.75	16.49	293.76	2.67

续表

角钢号数	尺寸 /mm			截面面积 /cm^2	理论质量 /(kg/m)	外表面积 /(m^2/m)	参考数值										z_0 /cm
							$x-x$			x_0-x_0			y_0-y_0			x_1-x_1	
	b	d	r				I_x /cm^4	i_x /cm	W_x /cm^3	I_{x0} /cm^4	i_{x0} /cm	W_{x0} /cm^3	I_{y0} /cm^4	i_{y0} /cm	W_{y0} /cm^3	I_{x1} /cm^4	
10	100	6	12	11.932	9.366	0.393	114.95	3.10	15.68	181.98	3.90	25.74	47.92	2.00	12.69	200.07	2.67
		7		13.796	10.830	0.393	131.86	3.09	18.10	208.97	3.89	29.55	54.74	1.99	14.26	233.54	2.71
		8		15.638	12.276	0.393	148.24	3.08	20.47	235.07	3.88	33.24	61.41	1.98	15.75	267.09	2.76
		10		19.261	15.120	0.392	179.51	3.05	25.06	284.68	3.84	40.26	74.35	1.96	18.54	334.48	2.84
		12		22.800	17.898	0.391	208.90	3.03	29.48	330.95	3.81	46.80	86.84	1.95	21.08	402.34	2.91
		14		26.256	20.611	0.391	236.53	3.00	33.73	374.06	3.77	52.90	99.00	1.94	23.44	470.75	2.99
		16		29.627	23.257	0.390	262.53	2.98	37.82	414.16	3.74	58.57	110.89	1.94	25.63	539.80	3.06
11	110	7	12	15.196	11.928	0.433	177.16	3.41	22.05	280.94	4.30	36.12	73.38	2.20	17.51	310.64	2.96
		8		17.238	13.532	0.433	199.46	3.40	24.95	316.49	4.28	40.69	82.42	2.19	19.39	355.20	3.01
		10		21.261	16.690	0.432	242.19	3.38	30.60	384.39	4.25	49.42	99.98	2.17	22.91	444.65	3.09
		12		25.200	19.782	0.431	282.55	3.35	36.05	448.17	4.22	57.62	116.93	2.15	26.15	534.60	3.16
		14		29.056	22.809	0.431	320.71	3.32	41.31	508.01	4.18	65.31	133.40	2.14	29.14	625.16	3.24

续表

角钢号数	尺寸/mm			截面面积/cm^2	理论质量/(kg/m)	外表面积/(m^2/m)	参考数值										z_0/cm
							$x-x$			x_0-x_0			y_0-y_0			x_1-x_1	
	b	d	r				I_x/cm^4	i_x/cm	W_x/cm^3	I_{x0}/cm^4	i_{x0}/cm	W_{x0}/cm^3	I_{y0}/cm^4	i_{y0}/cm	W_{y0}/cm^3	I_{x1}/cm^4	
12.5	125	8	14	19.750	15.504	0.492	297.03	3.88	32.52	470.89	4.88	53.28	123.16	2.50	25.86	521.01	3.37
		10		24.373	19.133	0.491	361.67	3.85	39.97	573.89	4.85	64.93	149.46	2.48	30.62	651.93	3.45
		12		28.912	22.696	0.491	423.16	3.83	41.17	671.44	4.82	75.96	174.88	2.46	35.03	783.42	3.53
		14		33.367	26.193	0.490	481.65	3.80	54.16	763.73	4.78	86.41	199.57	2.45	39.13	915.61	3.61
14	140	10		27.373	21.488	0.551	514.65	4.34	50.58	817.27	5.46	82.56	212.04	2.78	39.20	915.11	3.82
		12		32.512	25.522	0.551	603.68	4.31	59.80	958.79	5.43	96.85	248.57	2.76	45.02	1 099.28	3.90
		14		37.567	29.490	0.550	688.81	4.28	68.75	1 093.56	5.40	110.47	284.06	2.75	50.45	1 284.22	3.98
		16		42.539	33.393	0.549	770.24	4.26	77.46	1 221.81	5.36	123.42	318.67	2.74	55.55	1 470.07	4.06
16	160	10	16	31.502	24.729	0.630	779.53	4.98	66.70	1 237.30	6.27	109.36	321.76	3.20	52.76	1 365.33	4.31
		12		37.441	29.391	0.630	916.58	4.95	78.98	1 455.68	6.24	128.67	377.49	3.18	60.74	1 639.57	4.39
		14		43.296	33.987	0.629	1 048.36	4.92	90.95	1 665.02	6.20	147.17	431.70	3.16	68.24	1 914.68	4.47
		16		49.067	38.518	0.629	1 175.08	4.89	102.63	1 865.57	6.17	164.89	484.59	3.14	75.31	2 190.82	4.55

续表

角钢号数	尺寸/mm			截面面积/cm^2	理论质量/(kg/m)	外表面积/(m^2/m)	参考数值										z_0/cm
							$x-x$			x_0-x_0			y_0-y_0			x_1-x_1	
	b	d	r				I_x/cm^4	i_x/cm	W_x/cm^3	I_{x0}/cm^4	i_{x0}/cm	W_{x0}/cm^3	I_{y0}/cm^4	i_{y0}/cm	W_{y0}/cm^3	I_{x1}/cm^4	
18	180	12	16	42.241	33.159	0.710	1 321.35	5.59	100.82	2 100.10	7.05	165.00	542.61	3.58	78.41	2 332.80	4.89
		14		48.896	38.383	0.709	1 514.48	5.56	116.25	2 407.42	7.02	189.14	621.53	3.56	88.38	2 723.48	4.97
		16		55.467	43.542	0.709	1 700.99	5.54	131.13	2 703.37	6.98	212.40	698.60	3.55	97.83	3 115.29	5.05
		18		61.955	48.634	0.708	1 875.12	5.50	145.64	2 988.24	6.94	234.78	762.01	3.51	105.14	3 502.43	5.13
20	200	14	18	54.642	42.894	0.788	2 103.55	6.20	144.70	3 343.26	7.82	236.40	863.83	3.98	111.82	3 734.10	5.46
		16		62.013	48.680	0.788	2 366.15	6.18	163.65	3 760.89	7.79	265.93	971.41	3.96	123.96	4 270.39	5.54
		18		69.301	54.401	0.787	2 620.64	6.15	182.22	4 164.54	7.75	294.48	1 076.74	3.94	135.52	4 808.13	5.62
		20		76.505	60.056	0.787	2 867.30	6.12	200.42	4 554.55	7.72	322.06	1 180.04	3.93	146.55	5 347.51	5.69
		24		90.661	71.168	0.785	3 338.25	6.07	236.17	5 294.97	7.64	374.41	1 381.53	3.90	166.65	6 457.16	5.87

注：截面图中的 $r_1=1/3d$ 及表中 r 值的数据用于孔型设计，不做交货条件。

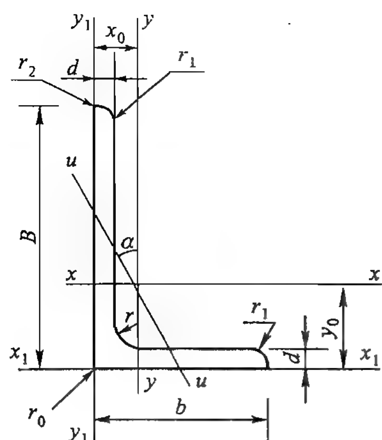


表 2　热轧不等

符号意义：

B——长边宽度；

d——边厚度；

r_1——边端内圆弧半径；

i——惯性半径；

x_0——重心距离；

角钢号数	尺寸/mm B	尺寸/mm b	尺寸/mm d	尺寸/mm r	截面面积 /cm^2	理论质量 /(kg/m)	外表面积 /(m^2/m)	参 x-x I_x /cm^4	参 x-x i_x /cm	参 x-x W_x /cm^3
2.5/1.6	25	16	3	3.5	1.162	0.912	0.080	0.70	0.78	0.43
			4		1.499	1.176	0.079	0.88	0.77	0.55
3.2/2	32	20	3		1.492	1.171	0.102	1.53	1.01	0.72
			4		1.939	1.522	0.101	1.93	1.00	0.93
4/2.5	40	25	3	4	1.890	1.484	0.127	3.08	1.28	1.15
			4		2.467	1.936	0.127	3.93	1.26	1.49
4.5/2.8	45	28	3	5	2.149	1.687	0.143	4.45	1.44	1.47
			4		2.806	2.203	0.143	5.69	1.42	1.91
5/3.2	50	32	3	5.5	2.431	1.908	0.161	6.24	1.60	1.84
			4		3.177	2.494	0.160	8.02	1.59	2.39
5.6/3.6	56	36	3	6	2.743	2.153	0.181	8.88	1.80	2.32
			4		3.590	2.818	0.180	11.45	1.79	3.03
			5		4.415	3.466	0.180	13.86	1.77	3.71
6.3/4	63	40	4	7	4.058	3.185	0.202	16.49	2.02	3.87
			5		4.993	3.920	0.202	20.02	2.00	4.74
			6		5.908	4.638	0.201	23.36	1.96	5.59
			7		6.802	5.339	0.201	26.53	1.98	6.40

边角钢(GB 9788—1988)

b——短边宽度；
r——内圆弧半径；
I——惯性矩；
W——抗弯截面系数；
y_0——重心距离。

考			数		值					
y-y			x_1-x_1		y_1-y_1		u-u			
I_y /cm^4	i_y /cm	W_y /cm^3	I_{x1} /cm^4	y_0 /cm	I_{y1} /cm^4	x_0 /cm	I_u /cm^4	i_u /cm	W_u /cm^3	tan α
0.22	0.44	0.19	1.56	0.86	0.43	0.42	0.14	0.34	0.16	0.392
0.27	0.43	0.24	2.09	0.90	0.59	0.46	0.17	0.34	0.20	0.381
0.46	0.55	0.30	3.27	1.08	0.82	0.49	0.28	0.43	0.25	0.382
0.57	0.54	0.39	4.37	1.12	1.12	0.53	0.35	0.42	0.32	0.374
0.93	0.70	0.49	5.39	1.32	1.59	0.59	0.56	0.54	0.40	0.385
1.18	0.69	0.63	8.53	1.37	2.14	0.63	0.71	0.54	0.52	0.381
1.34	0.79	0.62	9.10	1.47	2.23	0.64	0.80	0.61	0.51	0.383
1.70	0.78	0.80	12.13	1.51	3.00	0.68	1.02	0.60	0.66	0.380
2.02	0.91	0.82	12.49	1.60	3.31	0.73	1.20	0.70	0.68	0.404
2.58	0.90	1.06	16.65	1.65	4.45	0.77	1.53	0.69	0.87	0.402
2.92	1.03	1.05	17.54	1.78	4.70	0.80	1.73	0.79	0.87	0.408
3.76	1.02	1.37	23.39	1.82	6.33	0.85	2.23	0.79	1.13	0.408
4.49	1.01	1.65	29.25	1.87	7.94	0.88	2.67	0.78	1.36	0.404
5.23	1.14	1.70	33.30	2.04	8.63	0.92	3.12	0.88	1.40	0.398
6.31	1.12	2.71	41.63	2.08	10.86	0.95	3.76	0.87	1.71	0.396
7.29	1.11	2.43	49.98	2.12	13.12	0.99	4.34	0.86	1.99	0.393
8.24	1.10	2.78	58.07	2.15	15.47	1.03	4.97	0.86	2.29	0.389

角钢号数	尺寸/mm				截面面积/cm²	理论质量/(kg/m)	外表面积/(m²/m)	参		
								x-x		
	B	b	d	r				I_x/cm⁴	i_x/cm	W_x/cm³
7/4.5	70	45	4	7.5	4.547	3.570	0.226	23.17	2.26	4.86
			5		5.609	4.403	0.225	27.95	2.23	5.92
			6		6.647	5.218	0.225	32.54	2.21	6.95
			7		7.657	6.011	0.225	37.22	2.20	8.03
(7.5/5)	75	50	5	8	6.125	4.808	0.245	34.86	2.39	6.83
			6		7.260	5.699	0.245	41.12	2.38	8.12
			8		9.467	7.431	0.244	52.39	2.35	10.52
			10		11.590	9.098	0.244	62.71	2.33	12.79
8/5	80	50	5	8	6.375	5.005	0.255	41.96	2.56	7.78
			6		7.560	5.935	0.255	49.49	2.56	9.25
			7		8.724	6.848	0.255	56.16	2.54	10.58
			8		9.867	7.745	0.254	62.83	2.52	11.92
9/5.6	90	56	5	9	7.212	5.661	0.287	60.45	2.90	9.92
			6		8.557	6.717	0.286	71.03	2.88	11.74
			7		9.880	7.756	0.286	81.01	2.86	13.49
			8		11.183	8.779	0.286	91.03	2.85	15.27
10/6.3	100	63	6	10	9.617	7.550	0.320	99.06	3.21	14.64
			7		11.111	8.722	0.320	113.45	3.20	16.88
			8		12.584	9.878	0.319	127.37	3.18	19.08
			10		15.467	12.142	0.319	153.81	3.15	23.32
10/8	100	80	6	10	10.637	8.350	0.354	107.04	3.17	15.19
			7		12.301	9.656	0.354	122.73	3.16	17.52
			8		13.944	10.946	0.353	137.92	3.14	19.81
			10		17.167	13.476	0.353	166.87	3.12	24.24

参			数			值				
y-y			x_1-x_1		y_1-y_1		u-u			
I_y /cm⁴	i_y /cm	W_y /cm³	I_{x1} /cm⁴	y_0 /cm	I_{y1} /cm⁴	x_0 /cm	I_u /cm⁴	i_u /cm	W_u /cm³	tan α
7.55	1.29	2.17	45.92	2.24	12.26	1.02	4.40	0.98	1.77	0.410
9.13	1.28	2.65	57.10	2.28	15.39	1.06	5.40	0.98	2.19	0.407
10.62	1.26	3.12	68.35	2.32	18.58	1.09	6.35	0.98	2.59	0.404
12.01	1.25	3.57	79.99	2.36	21.84	1.13	7.16	0.97	2.94	0.402
12.61	1.44	3.30	70.00	2.40	21.04	1.17	7.41	1.10	2.74	0.435
14.70	1.42	3.88	84.30	2.44	25.37	1.21	8.54	1.08	3.19	0.435
18.53	1.40	4.99	112.50	2.52	34.23	1.29	10.87	1.07	4.10	0.429
21.96	1.38	6.04	140.80	2.60	43.43	1.36	13.10	1.06	4.99	0.423
12.82	1.42	3.32	85.21	2.60	21.06	1.14	7.66	1.10	2.74	0.388
14.95	1.41	3.91	102.53	2.65	25.41	1.18	8.85	1.08	3.20	0.387
16.96	1.39	4.48	119.33	2.69	29.82	1.21	10.18	1.08	3.70	0.384
18.85	1.38	5.03	136.41	2.73	34.32	1.25	11.38	1.07	4.16	0.381
18.32	1.59	4.21	121.32	2.91	29.53	1.25	10.98	1.23	3.49	0.385
21.42	1.58	4.96	145.59	2.95	35.58	1.29	12.90	1.23	4.13	0.384
24.36	1.57	5.70	169.60	3.00	41.71	1.33	14.67	1.22	4.72	0.382
27.15	1.56	6.41	194.17	3.04	47.93	1.36	16.34	1.21	5.29	0.380
30.94	1.79	6.35	199.71	3.24	50.50	1.43	18.42	1.38	5.25	0.394
35.26	1.78	7.29	233.00	3.28	59.14	1.47	21.00	1.38	6.02	0.394
39.39	1.77	8.21	266.32	3.32	67.88	1.50	23.50	1.37	6.78	0.391
47.12	1.74	9.98	333.06	3.40	85.73	1.58	28.33	1.35	8.24	0.387
61.24	2.40	10.16	199.83	2.95	102.68	1.97	31.65	1.72	8.37	0.627
70.08	2.39	11.71	233.20	3.00	119.98	2.01	36.17	1.72	9.60	0.626
78.58	2.37	13.21	266.61	3.04	137.37	2.05	40.58	1.71	10.80	0.625
94.65	2.35	16.12	333.63	3.12	172.48	2.13	49.10	1.69	13.12	0.622

角钢号数	尺寸/mm				截面面积/cm²	理论质量/(kg/m)	外表面积/(m²/m)	参		
								x-x		
	B	b	d	r				I_x/cm⁴	i_x/cm	W_x/cm³
11/7	110	70	6	10	10.637	8.350	0.354	133.37	3.54	17.85
			7		12.301	9.656	0.354	153.00	3.53	20.60
			8		13.944	10.946	0.353	172.04	3.51	23.30
			10		17.167	13.476	0.353	208.39	3.48	28.54
12.5/8	125	80	7	11	14.096	11.066	0.403	227.98	4.02	26.86
			8		15.989	12.551	0.403	256.77	4.01	30.41
			10		19.712	15.474	0.402	312.04	3.98	37.33
			12		23.351	18.330	0.402	364.41	3.95	44.01
14/9	140	90	8	12	18.038	14.160	0.453	365.64	4.50	38.48
			10		22.261	17.475	0.452	445.50	4.47	47.31
			12		26.400	20.724	0.451	521.59	4.44	55.87
			14		30.456	23.908	0.451	594.10	4.42	64.18
16/10	160	100	10	13	25.315	19.872	0.512	668.69	5.14	62.13
			12		30.054	23.592	0.511	784.91	5.11	73.49
			14		34.709	27.247	0.510	896.30	5.08	84.56
			16		39.281	30.835	0.510	1 003.04	5.05	95.33
18/11	180	110	10	14	28.373	22.273	0.571	956.25	5.80	78.96
			12		33.712	26.464	0.571	1 124.72	5.78	93.53
			14		38.967	30.589	0.570	1 286.91	5.75	107.76
			16		44.139	34.649	0.569	1 443.06	5.72	121.64
20/12.5	200	125	12		37.912	29.761	0.641	1 570.90	6.44	116.73
			14		43.867	34.436	0.640	1 800.97	6.41	134.65
			16		49.739	39.045	0.639	2 023.35	6.38	152.18
			18		55.526	43.588	0.639	2 238.30	6.35	169.33

注:1. 括号内型号不推荐使用。

2. 截面图中的 $r_1 = 1/3d$ 及表中 r 的数据用于孔型设计,不做交货条件。

续表

考数值											
y-y			x_1-x_1		y_1-y_1		u-u				
I_y /cm^4	i_y /cm	W_y /cm^3	I_{x1} /cm^4	y_0 /cm	I_{y1} /cm^4	x_0 /cm	I_u /cm^4	i_u /cm	W_u /cm^3	tan α
42. 92	2. 01	7. 90	265. 78	3. 53	69. 08	1. 57	25. 36	1. 54	6. 53	0. 403
49. 01	2. 00	9. 09	310. 07	3. 57	80. 82	1. 61	28. 95	1. 53	7. 50	0. 402
54. 87	1. 98	10. 25	354. 39	3. 62	92. 70	1. 65	32. 45	1. 53	8. 45	0. 401
65. 88	1. 96	12. 48	443. 13	3. 70	116. 83	1. 72	39. 20	1. 51	10. 29	0. 397
74. 42	2. 30	12. 01	454. 99	4. 01	120. 32	1. 80	43. 81	1. 76	9. 92	0. 408
83. 49	2. 28	13. 56	519. 99	4. 06	137. 85	1. 84	49. 15	1. 75	11. 18	0. 407
100. 67	2. 26	16. 56	650. 09	4. 14	173. 40	1. 92	59. 45	1. 74	13. 64	0. 404
116. 67	2. 24	19. 43	780. 39	4. 22	209. 67	2. 00	69. 35	1. 72	16. 01	0. 400
120. 69	2. 59	17. 34	730. 53	4. 50	195. 79	2. 04	70. 83	1. 98	14. 31	0. 411
140. 03	2. 56	21. 22	913. 20	4. 58	245. 92	2. 12	85. 82	1. 96	17. 48	0. 409
169. 79	2. 54	24. 95	1 096. 09	4. 66	296. 89	2. 19	100. 21	1. 95	20. 54	0. 406
192. 10	2. 51	28. 54	1 279. 26	4. 74	348. 82	2. 27	114. 13	1. 94	23. 52	0. 403
205. 03	2. 85	26. 56	1 362. 89	5. 24	336. 59	2. 28	121. 74	2. 19	21. 92	0. 390
239. 06	2. 82	31. 28	1 635. 56	5. 32	405. 94	2. 36	142. 33	2. 17	25. 79	0. 388
271. 20	2. 80	35. 83	1 908. 50	5. 40	476. 42	2. 43	162. 23	2. 16	29. 56	0. 385
301. 60	2. 77	40. 24	2 181. 79	5. 48	548. 2	2. 51	182. 57	2. 16	33. 44	0. 382
278. 11	3. 13	32. 49	1 940. 40	5. 89	447. 22	2. 44	166. 50	2. 42	26. 88	0. 376
325. 03	3. 10	38. 32	2 328. 38	5. 98	538. 94	2. 52	194. 87	2. 40	31. 66	0. 374
369. 55	3. 08	43. 97	2 716. 60	6. 06	631. 95	2. 59	222. 30	2. 39	36. 32	0. 372
411. 85	3. 06	49. 44	3 105. 15	6. 14	726. 46	2. 67	248. 94	2. 38	40. 87	0. 369
483. 16	3. 57	49. 99	3 193. 85	6. 54	787. 74	2. 83	285. 79	2. 74	41. 23	0. 392
550. 83	3. 54	57. 44	3 726. 17	6. 62	922. 47	2. 91	326. 58	2. 73	47. 34	0. 390
615. 44	3. 52	64. 69	4 258. 86	6. 70	1 058. 86	2. 99	366. 21	2. 71	53. 32	0. 388
677. 19	3. 49	71. 74	4 792. 00	6. 78	1 197. 13	3. 06	404. 83	2. 70	59. 18	0. 385

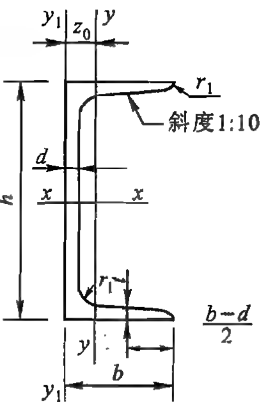


表 3 热轧槽钢(GB 707—1988)

h——高度；
b——腿宽度；
d——腰厚度；
t——平均腿厚度；
r——内圆弧半径；
r_1——腿端圆弧半径；
I——惯性矩；
W——抗弯截面系数；
i——惯性半径；
z_0——$y-y$ 轴与 y_1-y_1 轴间距。

型号	尺寸 /mm						截面面积 /cm²	理论质量 /(kg/m)	参考数值							
									$x-x$			$y-y$			y_1-y_1	z_0 /cm
	h	b	d	t	r	r_1			W_x /cm³	I_x /cm⁴	i_x /cm	W_y /cm³	I_y /cm⁴	i_y /cm	I_{y1} /cm⁴	
5	50	37	4.5	7	7.0	3.5	6.928	5.438	10.4	26.0	1.94	3.55	8.30	1.10	20.9	1.35
6.3	63	40	4.8	7.5	7.5	3.8	8.451	6.634	16.1	50.8	2.45	4.50	11.9	1.19	28.4	1.36
8	80	43	5.0	8	8.0	4.0	10.248	8.045	25.3	101	3.15	5.79	16.6	1.27	37.4	1.43
10	100	48	5.3	8.5	8.5	4.2	12.748	10.007	39.7	198	3.95	7.8	25.6	1.41	54.9	1.52
12.6	126	53	5.5	9	9.0	4.5	15.692	12.318	62.1	391	4.95	10.2	38.0	1.57	77.1	1.59
14a	140	58	6.0	9.5	9.5	4.8	18.516	14.535	80.5	564	5.52	13.0	53.2	1.70	107	1.71
14b	140	60	8.0	9.5	9.5	4.8	21.316	16.733	87.1	609	5.35	14.1	61.1	1.69	121	1.67
16a	160	63	6.5	10	10.0	5.0	21.962	17.240	108	866	6.28	16.3	73.3	1.83	144	1.80
16	160	65	8.5	10	10.0	5.0	25.162	19.752	117	935	6.10	17.6	83.4	1.82	161	1.75

续表

型号	尺寸 /mm						截面面积 /cm^2	理论质量 /(kg/m)	参考数值							
									$x-x$			$y-y$			y_1-y_1	z_0 /cm
	h	b	d	t	r	r_1			W_x /cm^3	I_x /cm^4	i_x /cm	W_y /cm^3	I_y /cm^4	i_y /cm	I_{y_1} /cm^4	
18a	180	68	7.0	10.5	10.5	5.2	25.699	20.174	141	1 270	7.04	20.0	98.6	1.96	190	1.88
18	180	70	9.0	10.5	10.5	5.2	29.299	23.000	152	1 370	6.84	21.5	111	1.95	210	1.84
20a	200	73	7.0	11	11.0	5.5	28.837	22.637	178	1 780	7.86	24.2	128	2.11	244	2.01
20	200	75	9.0	11	11.0	5.5	32.837	25.777	191	1 910	7.64	25.9	144	2.09	268	1.95
22a	220	77	7.0	11.5	11.5	5.8	31.846	24.999	218	2 390	8.67	28.2	158	2.23	298	2.10
22	220	79	9.0	11.5	11.5	5.8	36.246	28.453	234	2 570	8.42	30.1	176	2.21	326	2.03
25 a	250	78	7.0	12	12.0	6.0	34.917	27.410	270	3 370	9.82	30.6	176	2.24	322	2.07
25 b	250	80	9.0	12	12.0	6.0	39.917	31.335	282	3 530	9.41	32.7	196	2.22	353	1.98
25 c	250	82	11.0	12	12.0	6.0	44.917	35.260	295	3 690	9.07	35.9	218	2.21	384	1.92
28 a	280	82	7.5	12.5	12.5	6.2	40.034	31.427	340	4 760	10.9	35.7	218	2.33	388	2.10
28 b	280	84	9.5	12.5	12.5	6.2	45.637	35.823	366	5 130	10.6	37.9	242	2.30	428	2.02
28 c	280	86	11.5	12.5	12.5	6.2	51.234	40.219	393	5 500	10.4	40.3	268	2.29	463	1.95
32 a	320	88	8.0	14	14.0	7.0	48.513	38.083	475	7 600	12.5	46.5	305	2.50	552	2.24
32 b	320	90	10.0	14	14.0	7.0	54.913	43.107	509	8 140	12.2	49.2	336	2.47	593	2.16
32 c	320	92	12.0	14	14.0	7.0	61.313	48.131	543	8 690	11.9	52.6	374	2.47	643	2.09

续表

型号	尺寸/mm						截面面积/cm²	理论质量/(kg/m)	参考数值							
									$x-x$			$y-y$			y_1-y_1	z_0/cm
	h	b	d	t	r	r_1			W_x/cm³	I_x/cm⁴	i_x/cm	W_y/cm³	I_y/cm⁴	i_y/cm	I_{y1}/cm⁴	
36a	360	96	9.0	16	16.0	8.0	60.910	47.814	660	11 900	14.0	63.5	455	2.73	818	2.44
36b	360	98	11.0	16	16.0	8.0	68.110	53.466	703	12 700	13.6	66.9	497	2.70	880	2.37
36c	360	100	13.0	16	16.0	8.0	75.310	59.118	746	13 400	13.4	70.0	536	2.67	948	2.34
40a	400	100	10.5	18	18.0	9.0	75.068	58.928	879	17 600	15.3	78.8	592	2.81	1 070	2.49
40b	400	102	12.5	18	18.0	9.0	83.068	65.208	932	18 600	15.0	82.5	640	2.78	1 140	2.44
40c	400	104	14.5	18	18.0	9.0	91.068	71.488	986	19 700	14.7	86.2	688	2.75	1 220	2.42

注：截面图和表中标注的圆弧半径 r、r_1 的数据用于孔型设计，不做交货条件。

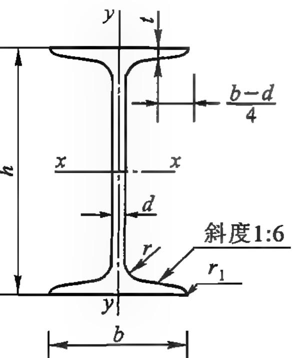


表 4　热轧工字钢(GB 706—1988)

符号意义：

h——高度；　　r_1——腿端圆弧半径；

b——腿宽度；　　I——惯性矩；

d——腰厚度；　　W——抗弯截面系数；

t——平均腿厚度；　　i——惯性半径；

r——内圆弧半径；　　S——半截面的静力矩。

型号	尺寸/mm						截面面积 /cm²	理论质量 /(kg/m)	参考数值						
									x−x				y−y		
	h	b	d	t	r	r_1			I_x /cm⁴	W_x /cm³	i_x /cm	I_x: S_x /cm	I_y /cm⁴	W_y /cm³	i_y /cm
10	100	68	4.5	7.6	6.5	3.3	14.345	11.261	245	49.0	4.14	8.59	33.0	9.72	1.52
12.6	126	74	5.0	8.4	7.0	3.5	18.118	14.223	488	77.5	5.20	10.8	46.9	12.7	1.61
14	140	80	5.5	9.1	7.5	3.8	21.516	16.890	712	102	5.76	12.0	64.4	16.1	1.73
16	160	88	6.0	9.9	8.0	4.0	26.131	20.513	1 130	141	6.58	13.8	93.1	21.2	1.89
18	180	94	6.5	10.7	8.5	4.3	30.756	24.143	1 660	185	7.36	15.4	122	26.0	2.00
20a	200	100	7.0	11.4	9.0	4.5	35.578	27.929	2 370	237	8.15	17.2	158	31.5	2.12
20b	200	102	9.0	11.4	9.0	4.5	39.578	31.069	2 500	250	7.96	16.9	169	33.1	2.06
22a	220	110	7.5	12.3	9.5	4.8	42.128	33.070	3 400	309	8.99	18.9	225	40.9	2.31
22b	220	112	9.5	12.3	9.5	4.8	46.528	36.524	3 570	325	8.78	18.7	239	42.7	2.27

续表

型号	尺寸/mm						截面面积 /cm^2	理论质量 /(kg/m)	参考数值						
									$x-x$				$y-y$		
	h	b	d	t	r	r_1			I_x /cm^4	W_x /cm^3	i_x /cm	I_x: S_x /cm	I_y /cm^4	W_y /cm^3	i_y /cm
25a	250	116	8.0	13.0	10.0	5.0	48.541	38.105	5 020	402	10.2	21.6	280	48.3	2.40
25b	250	118	10.0	13.0	10.0	5.0	53.541	42.030	5 280	423	9.94	21.3	309	52.4	2.40
28a	280	122	8.5	13.7	10.5	5.3	55.404	43.492	7 110	508	11.3	24.6	345	56.6	2.50
28b	280	124	10.5	13.7	10.5	5.3	61.004	47.888	7 480	534	11.1	24.2	379	61.2	2.49
32a	320	130	9.5	15.0	11.5	5.8	67.156	52.717	11 100	692	12.8	27.5	460	70.8	2.62
32b	320	132	11.5	15.0	11.5	5.8	73.556	57.741	11 600	726	12.6	27.1	502	76.0	2.61
32c	320	134	13.5	15.0	11.5	5.8	79.956	62.765	12 200	760	12.3	26.8	544	81.2	2.61
36a	360	136	10.0	15.8	12.0	6.0	76.480	60.037	15 800	875	14.4	30.7	552	81.2	2.69
36b	360	138	12.0	15.8	12.0	6.0	83.680	65.689	16 500	919	14.1	30.3	582	84.3	2.64
36c	360	140	14.0	15.8	12.0	6.0	90.880	71.341	17 300	962	13.8	29.9	612	87.4	2.60
40a	400	142	10.5	16.5	12.5	6.3	86.112	67.598	21 700	1 090	15.9	34.1	660	93.2	2.77
40b	400	144	12.5	16.5	12.5	6.3	94.112	73.878	22 800	1 140	15.6	33.6	692	96.2	2.71
40c	400	146	14.5	16.5	12.5	6.3	102.112	80.158	23 900	1 190	15.2	33.2	727	99.6	2.65
45a	450	150	11.5	18.0	13.5	6.8	102.446	80.420	32 200	1 430	17.7	38.6	855	114	2.89
45b	450	152	13.5	18.0	13.5	6.8	111.446	87.485	33 800	1 500	17.4	38.0	894	118	2.84
45c	450	154	15.5	18.0	13.5	6.8	120.446	94.550	35 300	1 570	17.1	37.6	938	122	2.79

续表

型号	尺寸/mm						截面面积 /cm^2	理论质量 /(kg/m)	参考数值						
									x - x				y - y		
	h	b	d	t	r	r_1			I_x /cm^4	W_x /cm^3	i_x /cm	I_x: S_x /cm	I_y /cm^4	W_y /cm^3	i_y /cm
50a	500	158	12.0	20.0	14.0	7.0	119.304	93.654	46 500	1 860	19.7	42.8	1 120	142	3.07
50b	500	160	14.0	20.0	14.0	7.0	129.304	101.504	48 600	1 940	19.4	42.4	1 170	146	3.01
50c	500	162	16.0	20.0	14.0	7.0	139.304	109.354	50 600	2 080	19.0	41.8	1 220	151	2.96
56a	560	166	12.5	21.0	14.5	7.3	135.435	106.316	65 600	2 340	22.0	47.7	1 370	165	3.18
56b	560	168	14.5	21.0	14.5	7.3	146.635	115.108	68 500	2 450	21.6	47.2	1 490	174	3.16
56c	560	170	16.5	21.0	14.5	7.3	157.835	123.900	71 400	2 550	21.3	46.7	1 560	183	3.16
63a	630	176	13.0	22.0	15.0	7.5	154.658	121.407	93 900	2 980	24.5	54.2	1 700	193	3.31
63b	630	178	15.0	22.0	15.0	7.5	167.258	131.298	98 100	3 160	24.2	53.5	1 810	204	3.29
63c	630	180	17.0	22.0	15.0	7.5	179.858	141.189	102 000	3 300	23.8	52.9	1 920	214	3.27

注：截面图和表中标注的圆弧半径 r、r_1 的数据用于孔型设计，不做交货条件。

附录二　习题答案

第一章　轴向拉伸和压缩

1-1　(a) $F_{N1}=0$,　$F_{N2}=F_{N3}=F$

(b) $F_{N1}=F_{N2}=2\ \text{kN}$

(c) $F_{N1}=F$,　$F_{N2}=2F$,　$F_{N3}=-F$

(d) $F_{N1}=-2F$,　$F_{N2}=F$

(e) $F_{N1}=-50\ \text{N}$,　$F_{N2}=-90\ \text{N}$

(f) $F_{N1}=0.896F$,　$F_{N2}=-0.732F$

1-2　在上端螺纹处 $\sigma_{max}=35.3\ \text{MPa}$

1-3　在吊杆下端有钉孔处 $\sigma_{max}=15.4\ \text{MPa}$

1-4　$\sigma_{AB}=-47.4\ \text{MPa}$,　$\sigma_{BC}=103.5\ \text{MPa}$

1-5　在链板有钉孔处 $\sigma_{max}=38.1\ \text{MPa}$

1-6　(1) $\sigma_{AC}=-20\ \text{MPa}$,　$\sigma_{CD}=0$,　$\sigma_{DB}=-20\ \text{MPa}$;

$\Delta l_{AC}=-0.01\ \text{mm}$,　$\Delta l_{CD}=0$,　$\Delta l_{DB}=-0.01\ \text{mm}$

(2) $\Delta l_{AB}=-0.02\ \text{mm}$

1-7　$\sigma_{AC}=31.8\ \text{MPa}$,　$\sigma_{CB}=127\ \text{MPa}$

$\varepsilon_{AC}=1.59\times10^{-4}$,　$\varepsilon_{CB}=6.36\times10^{-4}$

1-8　$F\approx2.54\times10^{6}\ \text{N}$

1-9　$E=208\ \text{GPa}$,　$\mu=0.317$

1-10　$\sigma_{max}=59.5\ \text{MPa}<[\sigma]$

1-11　$\alpha=45°$时,　$\sigma=11.2\ \text{MPa}>[\sigma]$;　$\alpha=60°$时,　$\sigma=9.17\ \text{MPa}<[\sigma]$

1-12　$\sigma=13.3\ \text{MPa}<[\sigma]$

1-13　$\sigma=200\ \text{MPa}<[\sigma]=214\ \text{MPa}$

1-14　$d_{拉杆}=17.8\ \text{mm}$,　$d_{链环}=12.6\ \text{mm}$

1-15　选 ∟45×45×3

1-16　(1) $D=24.4\ \text{mm}$,

(2) $\sigma_{螺杆}=119.5\ \text{MPa}<[\sigma]=160\ \text{MPa}$

1-17　(1) $\sigma=78.4\ \text{MPa}$,　$n=3.83$

(2) $Z=15$ 个

1-18　$F_{max}=119\ \text{kN}$

1-19　$F_{max}=84\ \text{kN}$

1-20 $F_{max}=33.3\ kN$

1-21 $F_A=\frac{F}{12}$, $F_B=\frac{7}{12}F$, $F_C=\frac{F}{3}$

1-22 $\sigma_{max}=-10\ MPa$

1-23 (a) $\sigma_{max}=131\ MPa$

(b) $\sigma_{max}=78.8\ MPa$

1-24 C

1-25 A, D

1-26 A, C

1-27 A, B

第二章 剪　切

2-1 $d \geqslant 40\ mm$

2-2 $d=6\ mm$

2-3 $d=34\ mm$, $\delta=10.4\ mm$

2-4 $\tau=106\ MPa<[\tau]$, $\sigma_{bs}=141\ MPa<[\sigma_{bs}]$

2-5 $\tau_b=320\ MPa$

2-6 $\tau=7.14\ MPa<[\tau]$, $\sigma_{bs}=25\ MPa<[\sigma_{bs}]$

2-7 $d=20\ mm$

2-8 铜丝:$\tau=51\ MPa$, 销子:$\tau=61.2\ MPa$

2-9 $d=3.8\ mm$

2-10 $F \geqslant 771\ kN$

2-11 $\tau=43.3\ MPa$, $\sigma_{bs}=59.5\ MPa$

第三章 扭　转

3-1 (a) $T_1=3\ kN\cdot m$, $T_2=-2\ kN\cdot m$, $T_3=-2\ kN\cdot m$

(b) $T_1=-3\ kN\cdot m$, $T_2=3\ kN\cdot m$, $T_3=0$

3-2 (a) $|T|_{max}=2\ M$

(b) $|T|_{max}=4\ M$

3-3 (a) $|T|_{max}=600\ N\cdot M$

(b) $|T|_{max}=400\ N\cdot m$

3-4 $\tau_{max1}=53\ kPa$, $\tau_{max2}=20.5\ kPa$,

$\tau_{max3}=28.5\ kPa$

3-5 (1) $\tau_{max}=15.9\ MPa$, $\tau_{min}=12.35\ MPa$

(2) $\varphi=0.284°/m$

3-6 $\tau_{max}=48.8\ MPa$, $\phi_{max}=1.22°$

3-7 $d=60.7\ mm$

3-8 $d=45\ mm$　$d_2=46\ mm$

3－9　$\tau_{max1}=16.2\ \text{MPa}<[\tau]$，　$\tau_{max2}=15.8\ \text{MPa}<[\tau]$，

$\tau_{max3}=15.1\ \text{MPa}<[\tau]$

3－10　$D=286$ mm

3－11　$d=18.5$ mm

3－12　$d=51.3$ mm

3－13　$d=80$ mm

3－14　$\tau_{max}=18.5\ \text{MPa}<[\tau]$

3－15　实心 $d=22$ mm；　空心 $D=26.2$ mm，

$d=21$ mm

重量比　实：空≈1.98

3－16　$\tau_{max}=20.4\ \text{MPa}<[\tau]$

3－17　(1) $t=9.75$ N·m/m

(2) $\tau_{max}=17.7\ \text{MPa}<[\tau]$

3－18　$n=6.73$

3－19　$\mu=0.3$

3－20　$d\geqslant 63$ mm

第四章　弯曲内力

4－1　(a) $F_{S1}=-\dfrac{ql}{2}$，　$M_1=-\dfrac{ql^2}{8}$；　$F_{S2}=-\dfrac{ql}{2}$，　$M_2=-\dfrac{ql^2}{8}$；　$F_{S3}=-\dfrac{ql}{2}$，

$M_3=-\dfrac{3}{8}ql^2$

(b) $F_{S1}=\dfrac{F}{3}$，　$M_1=\dfrac{2}{9}Fl$；　$F_{S2}=-\dfrac{2}{3}F$，　$M_2=\dfrac{2}{9}Fl$；　$F_{S3}=-\dfrac{2}{3}F$，

$M_3=0$

(c) $F_{S1}=F+\dfrac{ql}{2}$，　$M_1=-\dfrac{Fl}{2}-\dfrac{ql^2}{8}$；　$F_{S2}=F+ql$，

$M_2=-Fl-\dfrac{ql^2}{2}$

(d) $F_{S1}=\dfrac{M_e}{l}$，　$M_1=\dfrac{M_e}{3}$；　$F_{S2}=\dfrac{M_e}{l}$，　$M_2=-\dfrac{2}{3}M_e$

(e) $F_{S1}=-\dfrac{F}{2}$，　$M_1=-\dfrac{Fl}{2}$；　$F_{S2}=F$，　$M_2=-\dfrac{Fl}{2}$

(f) $F_{S1}=-\dfrac{ql}{2}$，　$M_1=-\dfrac{ql^2}{8}$；　$F_{S2}=\dfrac{ql}{8}$，　$M_2=-\dfrac{ql^2}{8}$

4－2　(a) $|F_S|_{max}=ql$，　$|M|_{max}=\dfrac{ql^2}{2}$

(b) $|F_S|_{max}=0$，　$|M|_{max}=M_e$

(c) $|F_S|_{max}=200$ N，　$|M|_{max}=950$ N·m

(d) $|F_S|_{max}=\dfrac{M_e}{l}$，　$|M|_{max}=M_e$

(e) $|F_S|_{max} = 2\ 670\ N$, $|M|_{max} = 356\ N \cdot m$

(f) $|F_S|_{max} = \frac{(l-2a)}{l}F$, $|M|_{max} = \frac{(l-2a)a}{l}F$

(g) $|F_S|_{max} = F$, $|M|_{max} = Fa$

(h) $|F_S|_{max} = 50\ N$, $|M|_{max} = 10\ N \cdot m$

(i) $|F_S|_{max} = qa$, $|M|_{max} = \frac{qa^2}{2}$

(j) $|F_S|_{max} = \frac{5}{4}qa$, $|M|_{max} = \frac{qa^2}{2}$

4－3 (a) $|M|_{max} = \frac{3}{4}Fa$

(b) $|M|_{max} = 3\ kN \cdot m$

(c) $|M|_{max} = \frac{ql^2}{8}$

(d) $|M|_{max} = \frac{Fl}{4}$

(e) $|M|_{max} = Fa$

(f) $|M|_{max} = \frac{3}{2}qa^2$

4－5 (a) $|F_S|_{max} = 2F$, $|M|_{max} = 3Fa$

(b) $|F_S|_{max} = 2qa$, $|M|_{max} = qa^2$

(c) $|F_S|_{max} = \frac{3}{8}ql$, $|M|_{max} = \frac{9}{128}ql^2$

(d) $|F_S|_{max} = F$, $|M|_{max} = Fa$

(e) $|F_S|_{max} = \frac{5}{4}qa$, $|M|_{max} = \frac{3}{4}qa^2$

(f) $|F_S|_{max} = \frac{3}{2}qa$, $|M|_{max} = qa^2$

(g) $|F_S|_{max} = 2qa$, $|M|_{max} = \frac{3qa^2}{2}$

(h) $|F_S|_{max} = \frac{7}{6}qa$, $|M|_{max} = \frac{5}{6}qa^2$

(i) $|F_S|_{max} = qa$, $|M|_{max} = qa^2$

(j) $|F_S|_{max} = qa$, $|M|_{max} = qa^2$

4－6 (a) $|M|_{max} = \frac{5}{2}qa^2$

(b) $|M|_{max} = 0.064q_0l^2$

(c) $|M|_{max} = \frac{Fa}{2}$

(d) $|M|_{max} = \frac{qa^2}{2}$

4-8 (a) $|F_N|_{max}=20$ kN, $|F_S|_{max}=20$ kN, $|M|_{max}=20$ kN·m

(b) $|F_N|_{max}=qa$, $|F_S|_{max}=2qa$, $|M|_{max}=3qa^2$

(c) $|F_N|_{max}=F$, $|F_S|_{max}=F$, $|M|_{max}=2Fa$

(d) $|F_N|_{max}=\dfrac{qa}{2}$, $|F_S|_{max}=qa$, $|M|_{max}=\dfrac{qa^2}{2}$

4-9 $x=\dfrac{l}{2}-\dfrac{c}{4}$, $M_{max}=\dfrac{F}{2l}\left(l-\dfrac{c}{2}\right)^2$

第五章 弯曲应力

5-1 $\sigma_A=+111$ MPa, $\sigma_B=-111$ MPa, $\sigma_C=0$,

$\sigma_D=-74.1$ MPa

5-2 $\sigma_{t,\ max}=\sigma_{C下}=73.7$ MPa, $\sigma_{c,\ max}=\sigma_{A下}=147$ MPa

5-3 $b\geqslant 69.3$ mm, $h\geqslant 208$ mm

5-4 $\sigma_{max}=82.8$ MPa

5-5 $d\geqslant 72.6$ mm

5-6 $W_z\geqslant 187.5\times10^3\text{mm}^3$, 选 18 工字钢

5-7 $b_1\geqslant 41.7$ mm, $h_1=125.1$ mm;

$b_2\geqslant 40$ mm, $h_2=120$ mm

5-8 $P\leqslant 523$ kN

5-9 (a) $I_z=89\times10^6\ \text{mm}^4$

(b) $I_z=7.64\times10^6\ \text{mm}^4$

(c) $I_z=73.47\times10^6\ \text{mm}^4$

(d) $I_z=188.2\times10^6\ \text{mm}^4$

(e) $I_z=256\times10^6\ \text{mm}^4$

(f) $I_z=1\ 932\times10^6\ \text{mm}^4$

5-10 无盖板处, $\sigma_{max}=31.9\ \text{MPa}<[\sigma]$;

有盖板处, $\sigma_{max}=19.6\ \text{MPa}<[\sigma]$

5-11 $\sigma_{t,\ max}=28.5\ \text{MPa}<[\sigma_t]$, $\sigma_{c,\ max}=52.9\ \text{MPa}<[\sigma_c]$

5-12 $b=316$ mm

5-13 $\tau_A=\tau_B=0$, $\tau_C=4.17$ MPa, $\tau_D=2.3$ MPa

5-14 $F_1\leqslant 1\ 764$ N, $F_2\leqslant 7\ 056$ N

5-15 选 12.6 工字钢

5-16 $[F]=106$ kN, $\tau_{max}=29.6\ \text{MPa}<[\tau]$

5-17 (1) $2\ \text{m}\leqslant x\leqslant 2.67$ m

(2) $W_z\geqslant 1\ 875\times10^3\ \text{mm}^3$, 选 50a 工字钢

5-18 $a=1.385$ m

第六章 弯曲变形 静不定梁

6-1 (a) $\theta_C=\frac{M_e l}{EI}$， $w_C=\frac{M_e l^2}{2EI}$

(b) $\theta_C=\frac{3Fl^2}{8EI}$， $w_C=-\frac{5Fl^3}{48EI}$

(c) $\theta_A=-\frac{M_e l}{6EI}$， $\theta_B=\frac{M_e l}{3EI}$， $w_C=-\frac{M_e l^2}{16EI}$

(d) $\theta_A=\frac{ql^3}{6EI}$， $w_A=-\frac{ql^4}{8EI}$

6-2 (a) $\theta_C=\frac{2M_e a}{EI}$， $w_C=\frac{4M_e a^2}{EI}$

(b) $\theta_A=\frac{13qa^3}{6EI}$， $w_A=-\frac{71qa^4}{24EI}$

(c) $\theta_A=\frac{M_e a}{6EI}$， $\theta_B=-\frac{M_e a}{3EI}$

(d) $\theta_C=-\frac{ql^3}{16EI}$， $w_C=-\frac{11ql^4}{384EI}$

6-3 (a) $\theta_B=-\frac{5Fa^2}{2EI}$， $w_B=-\frac{7Fa^3}{2EI}$

(b) $\theta_A=\frac{7ql^3}{24EI}$， $w_A=-\frac{11ql^4}{48EI}$

(c) $\theta_B=-\frac{13Fl^2}{48EI}$， $w_C=\frac{Fl^3}{24EI}$

(d) $\theta_C=\frac{5qa^3}{6EI}$， $w_C=-\frac{2qa^4}{3EI}$

(e) $\theta_A=-\frac{5ql^3}{24EI}$， $w_C=-\frac{17ql^4}{384EI}$

(f) $\theta_B=-\frac{3Fa^2}{4EI}$， $w_D=-\frac{13a^3}{12EI}$

6-4 $\theta_B=-\frac{5Fl^2}{16EI}$， $w_B=-\frac{3Fl^3}{16EI}$

6-5 $\theta_A=0.357\times10^{-3}$ rad $<[\theta]$， $\theta_B=0.572\times10^{-3}$ rad $<[\theta]$

6-6 $I=1\ 429\times10^4$ mm^4， 选两个 20a 槽钢

6-7 $l\leqslant8.6$ m

6-8 $q\leqslant8.67$ kN/m

6-9 $w_C=8.22$ mm

6-10 $\Delta F_1=78.9$ N

6-11 (a) $F_A=F_B=\frac{3}{8}ql$， $F_C=\frac{5}{4}ql$

(b) $F_A=F_B=\frac{F}{2}$， $M_A=M_B=\frac{Fl}{8}$

(c) $F_{Ax}=F$, $F_{Ay}=\frac{9Fb}{16a}$, $M_A=\frac{Fb}{8}$, $F_B=\frac{9Fb}{16a}$

(d) $F_A=6.5\ \text{kN}$, $M_A=2.8\ \text{kN}\cdot\text{m}$, $F_B=9.5\ \text{kN}$

6-12 $F_A=F_B=\frac{23}{32}F$, $F_C=\frac{41}{16}F$

6-13 (1) $\Delta d=0.815\ \text{mm}$

(2) $\Delta d'=0.022\ 2\ \text{mm}$

(3) $\frac{\Delta d'}{\Delta d}=2.73\%$

6-14 (1) $F_C=\frac{5}{4}F$

(2) 最大弯矩减少$\frac{Fl}{2}$，B点挠度减少$\frac{25Fl^3}{192EI}$

6-15 $M_D=-351\ \text{N}\cdot\text{m}$, $M_C=-91.4\ \text{N}\cdot\text{m}$, $M_E=549\ \text{N}\cdot\text{m}$

第七章　应力状态和强度理论

7-1 $F=94.2\ \text{kN}$

7-2 $\sigma_{max}=100\ \text{MPa}$, $\tau_{max}=50\ \text{MPa}$

7-3 (a) $\sigma_{45^\circ}=5\ \text{MPa}$, $\tau_{45^\circ}=25\ \text{MPa}$

(b) $\sigma_{60^\circ}=-10.4\ \text{MPa}$, $\tau_{60^\circ}=46\ \text{MPa}$

(c) $\sigma_{-67.5^\circ}=1.47\ \text{MPa}$, $\tau_{-67.5^\circ}=38.9\ \text{MPa}$

7-4 (a) $\sigma_{60^\circ}=12.5\ \text{MPa}$, $\tau_{60^\circ}=-65\ \text{MPa}$

(b) $\sigma_{157.5^\circ}=21.2\ \text{MPa}$, $\tau_{157.5^\circ}=-21.2\ \text{MPa}$

(c) $\sigma_\alpha=70\ \text{MPa}$, $\tau_\alpha=0$

7-5 (a) $\sigma_1=90\ \text{MPa}$, $\sigma_2=0$, $\sigma_3=-10\ \text{MPa}$, $\tau_{max}=50\ \text{MPa}$

由x逆时针转18°26′至σ_1

(b) $\sigma_1=74.2\ \text{MPa}$, $\sigma_2=15.8\ \text{MPa}$, $\sigma_3=0$, $\tau_{max}=37.1\ \text{MPa}$

由x逆时针转29°31′至σ_1

(c) $\sigma_1=100\ \text{MPa}$, $\sigma_2=\sigma_3=0$, $\tau_{max}=50\ \text{MPa}$

由x逆时针转26°34′至σ_2

7-6 $\sigma_x=-28.1\ \text{MPa}$, $\tau_x=-\tau_y=-37.4\ \text{MPa}$, $\sigma_1=\sigma_2=0$,

$\sigma_3=-78\ \text{MPa}$(与斜坡平行), $\tau_{max}=39\ \text{MPa}$

7-7 $\sigma_\alpha=20\ \text{MPa}$, $\sigma_1=33.5\ \text{MPa}$, $\sigma_2=0$, $\sigma_3=-82.7\ \text{MPa}$,

$\tau_{max}=58.1\ \text{MPa}$, 由$\sigma=30\ \text{MPa}$作用线逆时针转10°4′至$\sigma_1$

7-8 $\sigma_1=56.1\ \text{MPa}$, $\sigma_2=0$, $\sigma_3=-16.1\ \text{MPa}$, $\tau_{max}=36.1\ \text{MPa}$

7-9 (a) $\sigma_1=88.3\ \text{MPa}$, $\sigma_2=50\ \text{MPa}$, $\sigma_3=31.7\ \text{MPa}$, $\tau_{max}=28.3\ \text{MPa}$,

由x逆时针转22.5°至σ_1

(b) $\sigma_1=\sigma_2=50\ \text{MPa}$, $\sigma_3=-50\ \text{MPa}$, $\tau_{max}=50\ \text{MPa}$

7-10 $\sigma_1=\sigma_2=-2.5\ \text{MPa}$, $\sigma_3=-10\ \text{MPa}$

7－11 $M=3\ \text{kN}\cdot\text{m}$

7－12 $\sigma_x=80\ \text{MPa}$， $\sigma_y=0$

7－13 第一强度理论：当$\dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}>-\sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2}$，

$$\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2}=\sigma_b$$

第三强度理论：(a) 当$(\sigma_x+\sigma_y)>0$、$\sigma_x\sigma_y\geqslant\tau_x^2$， $(\sigma_x-\sigma_s)(\sigma_y-\sigma_s)=\tau_x^2$

(b) 当 $\sigma_x\sigma_y\leqslant\tau_x^2$， $(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_x^2=\sigma_s^2$

(c) 当$(\sigma_x+\sigma_y)<0$、$\sigma_x\sigma_y\geqslant\tau_x^2$， $(\sigma_x+\sigma_s)(\sigma_y+\sigma_s)=\tau_x^2$

7－14 当 $p=3\ \text{MPa}$， $\sigma_{r2}=26.2\ \text{MPa}<[\sigma]$， 安全

当 $p=5\ \text{MPa}$， $\sigma_{r1}=30.8\ \text{MPa}$略大于$[\sigma]$， 安全

7－15 $\delta=14.2\ \text{mm}$(第三强度理论)， $\delta=12.3\ \text{mm}$(第四强度理论)

第八章 组合变形构件的强度

8－1 $\sigma_{tmax}=6.75\ \text{MPa}$， $\sigma_{cmax}=-6.99\ \text{MPa}$

8－2 $4\,163\ \text{kN}\geqslant F_2\geqslant 1\,728\ \text{kN}$

8－3 No. 16

8－4 $n=1.52>[n]$， 安全

8－5 增大 7 倍

8－6 $F=18.4\ \text{kN}$， $e=1.79\ \text{mm}$

8－7 $[F]=45\ \text{kN}$

8－8 (1) $\sigma_{max}=32.6\ \text{MPa}$(压)

(2) 按第三强度理论 $n=6.5$

按第四强度理论 $n=7.0$

8－9 $[F_1]=3.03\ \text{kN}$ $[F_2]=2[F_1]$

8－10 $\delta=2.64\ \text{mm}$

8－11 (1) $d=48\ \text{mm}$

(2) $d=49.3\ \text{mm}$

8－12 $\sigma_{r3}=86.1\ \text{MPa}<[\sigma]$， 安全

8－13 $\sigma_{r4}=137.1\ \text{MPa}<[\sigma]$， 安全

第九章 压杆的稳定

9－1 $F_{cr}=3\,293\ \text{kN}$

9－2 $F_{cr}=259\ \text{kN}$

9－3 $a=43.1\ \text{mm}$， $F_{cr}=443\ \text{kN}$

9－4 $F_{cr}=400\ \text{kN}$

9－5 $F_{cr}=121.3\ \text{kN}$， $n=1.73<[n_{st}]$，不安全

9－6 $F_{AB}=54.5\ \text{kN}$， $F_{cr}=122\ \text{kN}$， $n=2.24<[n_{st}]$，不安全

9-7 $F_{cr}=207$ kN, $[F]=51.7$ kN

9-8 $d=52$ mm

9-9 59℃

9-10 $[q]=5.59$ kN/m

9-11 $F_{cr}=\dfrac{\pi^2 EI}{(2l)^2}$

附录三 索 引

（按汉语拼音字母顺序）

D

E

F

G

H

J

K

L

M

N

O

P

Q

R

S

T

W

X

Y

Z